Вероятность невырождения критического ветвящегося процесса в случайной среде при условии фиксации значения минимума сопровождающего случайного блуждания

М.А. Анохина

МГУ имени М.В. Ломоносова

9-th St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics

19.11.2025

Ветвящиеся процессы в случайной среде

- $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) невырожденных случайных величин;

Ветвящиеся процессы в случайной среде

- $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) невырожденных случайных величин;
- $\{f_y(s), y \in \mathbb{R}\}$ — семейство производящих функций;

Ветвящиеся процессы в случайной среде

- $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n, \ldots)$ — последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) невырожденных случайных величин;
- $\{f_y(s), y \in \mathbb{R}\}$ — семейство производящих функций;
- $\{X_{i,j}, i, j \in \mathbb{N}\}$ — семейство неотрицательных целочисленных случайных величин. Для фиксированного $\boldsymbol{\eta}$ $X_{i,j}$ являются н.о.р. для каждого i, $X_{i,j} \sim f_{\eta_i}$.

Ветвящиеся процессы в случайной среде

Определение

Ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС)

$$Z_0 = 1, \quad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i}, \quad n > 0.$$

Ветвящиеся процессы в случайной среде

Определение

Ветвящийся процесс в случайной среде (ВПСС)

$$Z_0 = 1, \quad Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i}, \quad n > 0.$$

Определение

Пусть $\xi_i = \ln f'_{\eta_i}(1)$. Тогда сопровождающее случайное блуждание для $\{Z_n\}$

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad n > 0.$$

ВПСС и случайное блуждание

Классификация

ВПСС называется

Классификация

ВПСС называется

- надкритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 > 0$;

Классификация

ВПСС называется

- надкритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 > 0$;
- критическим, если $\mathsf{E}\xi_1 = 0$;

Классификация

ВПСС называется

- надкритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 > 0$;
- критическим, если $\mathsf{E}\xi_1 = 0$;
- докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 < 0$.

Классификация

ВПСС называется

- надкритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 > 0$;
- критическим, если $\mathsf{E}\xi_1 = 0$;
- докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 < 0$:
  - слабо докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 e^{\xi_1} > 0$;

Классификация

ВПСС называется

- надкритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 > 0$;
- критическим, если $\mathsf{E}\xi_1 = 0$;
- докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 < 0$:
    - слабо докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 e^{\xi_1} > 0$;
    - умеренно докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 e^{\xi_1} = 0$;

Классификация

ВПСС называется

- надкритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 > 0$;
- критическим, если $\mathsf{E}\xi_1 = 0$;
- докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 < 0$:
  - слабо докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 e^{\xi_1} > 0$;
  - умеренно докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 e^{\xi_1} = 0$;
  - строго докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 e^{\xi_1} < 0$.

Классификация

ВПСС называется

- надкритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 > 0$;
- **критическим, если** $\mathsf{E}\boldsymbol{\xi}_1 \boldsymbol{=} 0$;
- докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 < 0$:
  - слабо докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 e^{\xi_1} > 0$;
  - умеренно докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 e^{\xi_1} = 0$;
  - строго докритическим, если $\mathsf{E}\xi_1 e^{\xi_1} < 0$.

Мы будем рассматривать критический ВПСС.

Теорема (Козлов, 1976)

Пусть $\{Z_n\}$ критический ВП в случайной среде $\boldsymbol{\eta}$ с геометрическим законом распределения числа потомков $\{f_y\}$, $\xi_1 = \ln f'_{\eta_1}(1)$, $\mathsf{E}\xi_1 = 0$, $\mathsf{E}\xi_1^2 \in (0, \infty)$ и пусть $\zeta := f''_{\eta_1}(1)/(2f'_{\eta_1}(1)^2)$, $\mathsf{E}\zeta < \infty$, $\mathsf{E}\zeta\xi_1 < \infty$. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(Z_n > 0\right) \sim \frac{C}{\sqrt{n}},$$

где C — некоторая константа.

Теорема (Afanasyev, Geiger, Kersting, Vatutin, 2005)

Пусть $\{Z_n\}$ критический ВП в случайной среде $\boldsymbol{\eta}$ с п.ф. $\{f_y\}$, $\xi_1 = \ln f'_{\eta_1}(1)$, $\mathsf{E}\xi_1 = 0$, $\mathsf{E}\xi_1^2 \in (0, \infty)$ и пусть $\zeta := f''_{\eta_1}(1)(1 + \ln^+ f'_{\eta_1}(1))/(f'_{\eta_1}(1))^2$, $\mathsf{E}\zeta < \infty$. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(Z_n > 0\right) \sim \frac{C}{\sqrt{n}},$$

где C — некоторая константа.

Теорема (Afanasyev, Geiger, Kersting, Vatutin, 2005)

Пусть $\{Z_n\}$ критический ВП в случайной среде $\boldsymbol{\eta}$ с п.ф. $\{f_y\}$, $\xi_1 = \ln f'_{\eta_1}(1)$, $\mathrm{E}\xi_1 = 0$, $\mathrm{E}\xi_1^2 \in (0, \infty)$ и пусть $\zeta := f''_{\eta_1}(1)(1 + \ln^+ f'_{\eta_1}(1))/(f'_{\eta_1}(1))^2$, $\mathrm{E}\zeta < \infty$. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathrm{P}\left(Z_n > 0\right) \sim \frac{C}{\sqrt{n}},$$

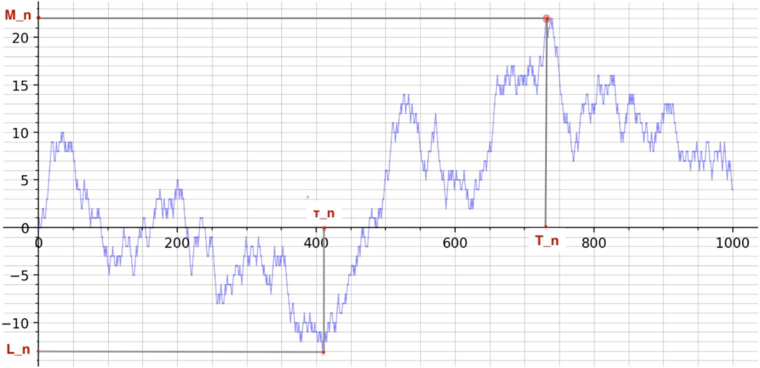
где C — некоторая константа.

Нас интересуют похожие результаты для критического ВПСС

$$\mathrm{P}\left(Z_n > 0 \middle| \min S_n = -k\right).$$

- $k \sim \sqrt{n}$, $n \to \infty$;
- $k/\sqrt{n} \to \infty$ и $k/n \to 0$, $n \to \infty$;
- $k = o(\sqrt{n})$, $n \to \infty$.

Пусть $M_n = \max\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$, $T_n = \max\{0 \le k \le n : S_k = M_n\}$, и пусть $L_n = \min\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$, $\tau_n = \max\{0 \le k \le n : S_k = L_n\}$.



Нас интересуют похожие результаты для критического ВПСС

$$\mathsf{P}\left(Z_n > 0 \middle| L_n = -k\right).$$

Мы рассмотрим критический ВПСС с геометрическим законом распределения числа потомков $\{f_y\}$ и арифметическими сл.вел. $\xi_i = \ln f'_{\eta_i}(1)$. Рассмотрим случай $k/\sqrt{n} \to y > 0$, $n \to \infty$.

Вспомогательные результаты

Теорема (Caravenna, 2005)

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р. арифметические сл.в. с $\mathrm{E}X_1 = 0$, $\mathrm{E}X_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathrm{P}\left(S_n = k | S_i > 0, i \leq n\right) = \frac{k}{\sigma^2 n} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2 n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

где $o(\cdot)$ равномерно мало по $k \in \mathbb{N}$.

Вспомогательные результаты

Теорема

Пусть $X_1, X_2, \dots$ — н.о.р. арифметические сл.в. с $\mathrm{E}X_1 = 0$, $\mathrm{E}X_1^2 = \sigma^2 \in (0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}_0$. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathrm{P}\left(S_n = k, S_i > -m, i \leq n\right) = \frac{CkU(m)}{n^{3/2}} e^{-\frac{k^2}{2\sigma^2 n}} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $o(\cdot)$ равномерно мало по $k \in \mathbb{N}$, $U(m)$ — функция восстановления, $C = e^{-c_1}/(\sigma^2\sqrt{\pi})$, c_1 — некоторая константа.

Функция восстановления

$$U(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(S_n \geq -x, S_i < 0, i \leq n\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

.

Теорема

Пусть $\{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ — ВПСС с геометрическим законом распределения числа потомков $\{f_y(s), y \in \mathbb{R}\}$, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — н.о.р. арифметические сл.в. с нулевым средним и конечной положительной дисперсией σ^2, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $L_n = \min_{i \le n} S_i$. Пусть k_n — целочисленная последовательность, такая что $k_n/\sqrt{n} \to y > 0$, $k_n \to \infty$, $n \to \infty$. Тогда

$$e^{k_n} \mathrm{P}\left(Z_n > 0 \middle| L_n = -k_n\right) \to C, \quad n \to \infty,$$

где C — некоторая константа.

Доказательство

Заметим, что

$$\mathrm{P}\left(Z_n > 0 | L_n = -k\right) = \sum_{l=1}^{n} \mathrm{P}\left(Z_n > 0, \tau_{min} = l | L_n = -k\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \mathrm{E}\left(\left.\frac{\mathbb{1}_{\{\tau_{min}=l\}}}{\sum\limits_{j=0}^{n} e^{-S_j}}\right| L_n = -k\right) = e^{-k} \sum_{l=1}^{n} \mathrm{E}\left(\left.\frac{\mathbb{1}_{\{\tau_{min}=l\}}}{\sum\limits_{j=0}^{n} e^{L_n - S_j}}\right| L_n = -k\right) =$$

$$= e^{-k} \sum_{l=1}^{n} \mathrm{P}\left(\tau_{min} = l | L_n = -k\right) \mathrm{E}\left(\left.\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{n} e^{L_n - S_j}}\right| L_n = -k, \tau_{min} = l\right).$$

Доказательство

Пусть $\widetilde{S}_j = S_{l-j} - L_n$, $j \in [0, \dots, l]$, и $\widehat{S}_j = L_n - S_{l+j}$, $j \in [1, \dots, n-l]$.

Доказательство

Пусть $\widetilde{S}_j = S_{l-j} - L_n$, $j \in [0, \ldots, l]$, и $\widehat{S}_j = L_n - S_{l+j}$, $j \in [1, \ldots, n-l]$. Тогда

$$\mathrm{P}\left(Z_n > 0 | L_n = -k\right) = e^{-k} \sum_{l=1}^{n} \mathrm{P}\left(\tau_{min} = l | L_n = -k\right) \times$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{l} e^{-\widetilde{S}_j} + \sum\limits_{j=1}^{n-l} e^{\widehat{S}_j}} \middle| \widetilde{S}_l = k, \widetilde{S}_i \geq 0, i \leq 0, \widehat{S}_i < 0, i \leq n-l \right).$$

Доказательство

Поскольку

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=0}^{n} e^{\widehat{S}_i} \le x \,\middle|\, \widehat{S}_i < 0, i \le n\right) \to \mathbb{P}^-\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{\widehat{S}_j} \le x\right), \quad n \to \infty,$$

Доказательство

Поскольку

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=0}^{n} e^{\widehat{S}_i} \le x \,\middle|\, \widehat{S}_i < 0, i \le n\right) \to \mathbb{P}^{-}\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{\widehat{S}_j} \le x\right), \quad n \to \infty,$$

и

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=0}^{n} e^{-\widetilde{S}_i} \le x \,\middle|\, \widetilde{S}_i \ge 0, i \le n, \widetilde{S}_n = k\right) \to \mathbb{P}^{+}\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\widetilde{S}_j} \le x\right), \quad n \to \infty,$$

Доказательство

Поскольку

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=0}^{n} e^{\widehat{S}_i} \leq x \,\middle|\, \widehat{S}_i < 0, i \leq n\right) \to \mathbb{P}^{-}\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{\widehat{S}_j} \leq x\right), \quad n \to \infty,$$

и

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=0}^{n} e^{-\widetilde{S}_i} \leq x \,\middle|\, \widetilde{S}_i \geq 0, i \leq n, \widetilde{S}_n = k\right) \to \mathbb{P}^{+}\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\widetilde{S}_j} \leq x\right), \quad n \to \infty,$$

получаем, что при $n \to \infty$ и $l \to \infty$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\sum_{j=0}^{l} e^{\widetilde{S}_j} + \sum_{j=1}^{n-l} e^{-\widehat{S}_j}} \,\middle|\, \widetilde{S}_l = k, \widetilde{S}_i \geq 0, i \leq 0, \widehat{S}_i < 0, i \leq n-l\right) \to C.$$

Лемма

В условиях теоремы при $n \to \infty$ имеем:

$$\mathsf{P}\left(\sum_{i=0}^{n} e^{\widehat{S}_i} \le x \,\middle|\, \widehat{S}_i < 0, i \le n \right) \to \mathbb{P}^{-}\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{\widehat{S}_j} \le x \right),$$

$$\mathsf{P}\left(\sum_{i=0}^{n} e^{-\widetilde{S}_i} \le x \,\middle|\, \widetilde{S}_i \ge 0, i \le n, \widetilde{S}_n = k \right) \to \mathbb{P}^{+}\left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\widetilde{S}_j} \le x \right),$$

где

$$\mathbb{P}^{+}(A) = \mathsf{E}\left(U(S_n) \mathbb{1}_{S_i \ge 0, i \le n} \mathbb{1}_A \right).$$

Доказательство

При $n \to \infty$

$$\mathrm{P}\left(\sum_{j=0}^{n} e^{-\widetilde{S}_j} \le x \,\middle|\, \widetilde{S}_i \ge 0, i \le n, \widetilde{S}_n = k\right) \sim$$

$$\sim \mathrm{P}\left(\sum_{j=0}^{n} e^{-\widetilde{S}_j} \le x, \sum_{j=k_1}^{n} e^{-\widetilde{S}_j} < \varepsilon \,\middle|\, \widetilde{S}_i \ge 0, i \le n, \widetilde{S}_n = k\right).$$

Доказательство

При $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{n} e^{-\widetilde{S}_j} \le x \,\middle|\, \widetilde{S}_i \ge 0, i \le n, \widetilde{S}_n = k\right) \sim$$

$$\sim \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{n} e^{-\widetilde{S}_j} \le x, \sum_{j=k_1}^{n} e^{-\widetilde{S}_j} < \varepsilon \,\middle|\, \widetilde{S}_i \ge 0, i \le n, \widetilde{S}_n = k\right) \sim$$

$$\sim \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{k_1-1} e^{-\widetilde{S}_j} \le x - \varepsilon \,\middle|\, \widetilde{S}_i \ge 0, i \le n, \widetilde{S}_n = k\right).$$

Доказательство

С учетом

$$Q := \mathrm{P}\left(\sum_{j=0}^{k_1-1} e^{-\widetilde{S}_j} \le x - \varepsilon \,\middle|\, \widetilde{S}_i \ge 0, i \le n, \widetilde{S}_n = k\right) =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{P}\left(\widetilde{S}_i \ge 0, i \le n, \widetilde{S}_n = k\right)} \times$$

$$\times \sum_{m \in \mathbb{N}_0} \mathrm{P}\left(\widetilde{S}_{n-k_1+1} = k - m, \widetilde{S}_i > -m, i \le n - k_1 + 1\right) \times$$

$$\times \mathrm{P}\left(\sum_{j=0}^{k_1-1} e^{-\widetilde{S}_j} \le x - \varepsilon, \widetilde{S}_i \ge 0, i \le k_1 - 1, \widetilde{S}_{k_1-1} = m\right).$$

и аналога теоремы Каравенна,

Доказательство

имеем

$$\lim_{n\to\infty} Q = \sum_{m=0}^{M} U(m)\mathrm{P}\left(\sum_{j=0}^{k_1-1} e^{-\widetilde{S}_j} \le x-\varepsilon, \widetilde{S}_i \ge 0, i \le k_1-1, \widetilde{S}_{k_1-1} = m\right).$$

Доказательство

имеем

$$\lim_{n\to\infty} Q = \sum_{m=0}^{M} U(m)\mathrm{P}\left(\sum_{j=0}^{k_1-1} e^{-\widetilde{S}_j} \leq x-\varepsilon, \widetilde{S}_i \geq 0, i \leq k_1-1, \widetilde{S}_{k_1-1}=m\right).$$

Получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} Q =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} U(m)\mathrm{P}\left(\sum_{j=0}^{k_1-1} e^{-\widetilde{S}_j} \leq x-\varepsilon, \widetilde{S}_i \geq 0, i \leq k_1-1, \widetilde{S}_{k_1-1}=m\right) =$$

$$= \mathrm{E}U(\widetilde{S}_{k_1-1})\mathbb{1}_{\sum_{j=0}^{k_1-1} e^{-\widetilde{S}_j}\leq x-\varepsilon}\mathbb{1}_{\widetilde{S}_i\geq 0, i\leq k_1-1} = \mathbb{P}^{+}\left(\sum_{j=0}^{k_1-1} e^{-\widetilde{S}_j} \leq x-\varepsilon\right).$$

Теорема (Vatutin, Kersting)

Пусть $\{Z_n\}$ критический ВП в случайной среде η с п.ф. $\{f_y\}$, $\xi_1 = \ln f'_{\eta_1}(1)$, $\mathrm{E}\xi_1 = 0$, $\mathrm{E}\xi_1^2 \in (0, \infty)$ и $\mathrm{E}\zeta < \infty$. Тогда при $n \to \infty$

$$\mathcal{L}\left(e^{-S_{\tau_n}} \mathrm{P}\left(Z_n > 0\right)\right) \xrightarrow{\omega} \mathcal{L}^{\pm}\left(\zeta^{-1}\right),$$

где случайная величина $\zeta \in (1, \infty)$ с вероятностью 1.

Список литературы

- М.В. Козлов. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде. *Теория вероятностей и ее применения*, 21(4):813–825, 1976.
- V. Afanasyev, J. Geiger, G. Kersting, V. Vatutin. Criticality for branching processes in random environment. *The Annals of Probability*, 2005.
- V. Vatutin, G. Kersting. Discrete Time Branching Processes in Random Environment. Wiley-ISTE, 2017
- F. Caravenna. A local limit theorem for random walks conditioned to stay positive. *Probability Theory Related Fields*, 133:508–530, 2005.

Спасибо!