О невырождении пары ветвящихся процессов в общей случайной среде

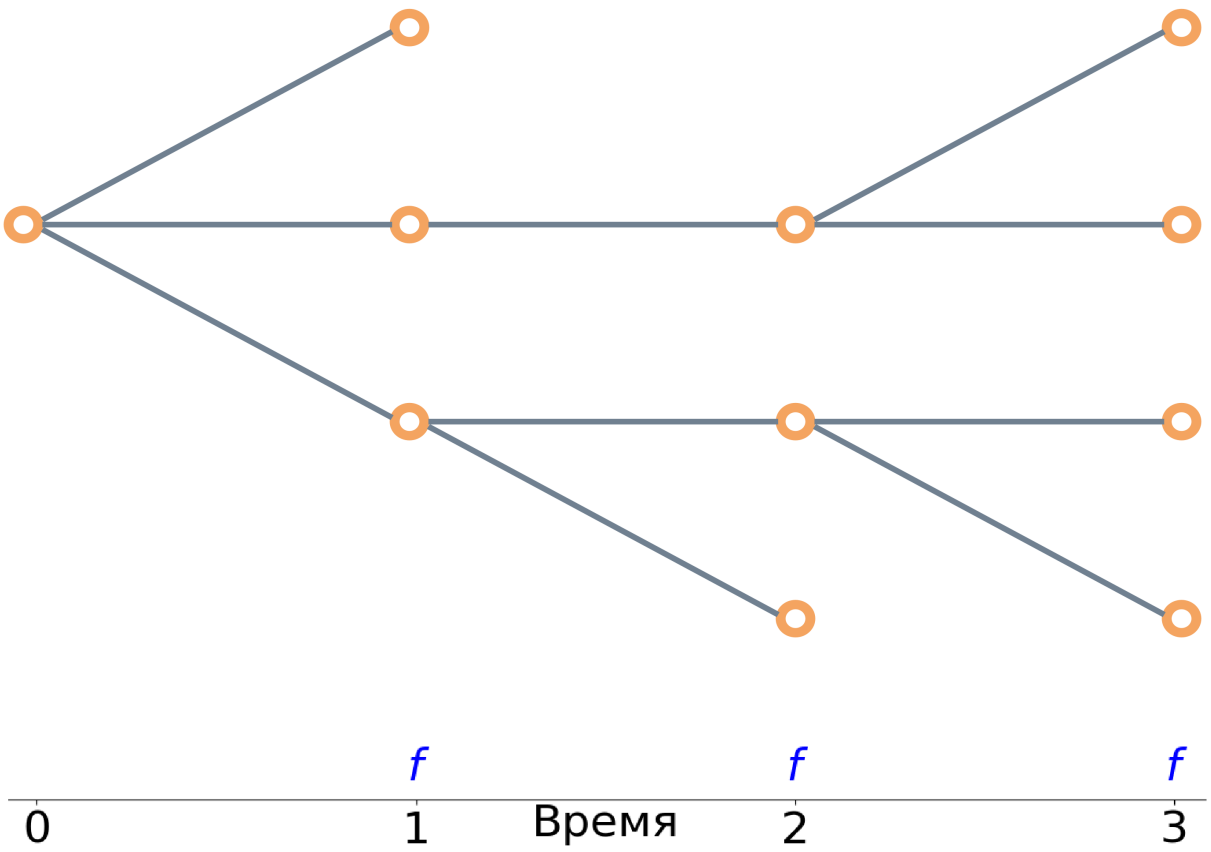
Д.А. Арапов

МГУ имени М.В. Ломоносова

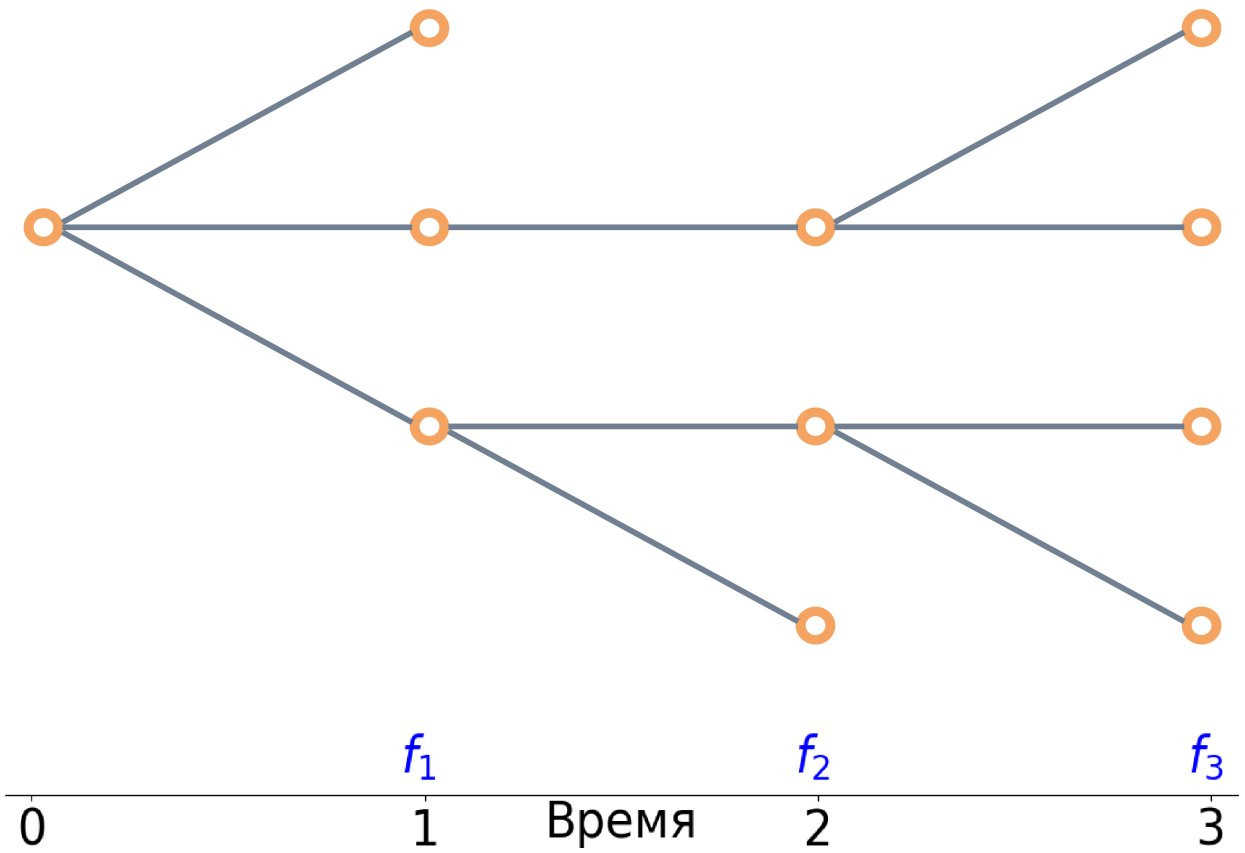
Научный руководитель: в.н.с. к.ф.-м.н. А.В. Шкляев

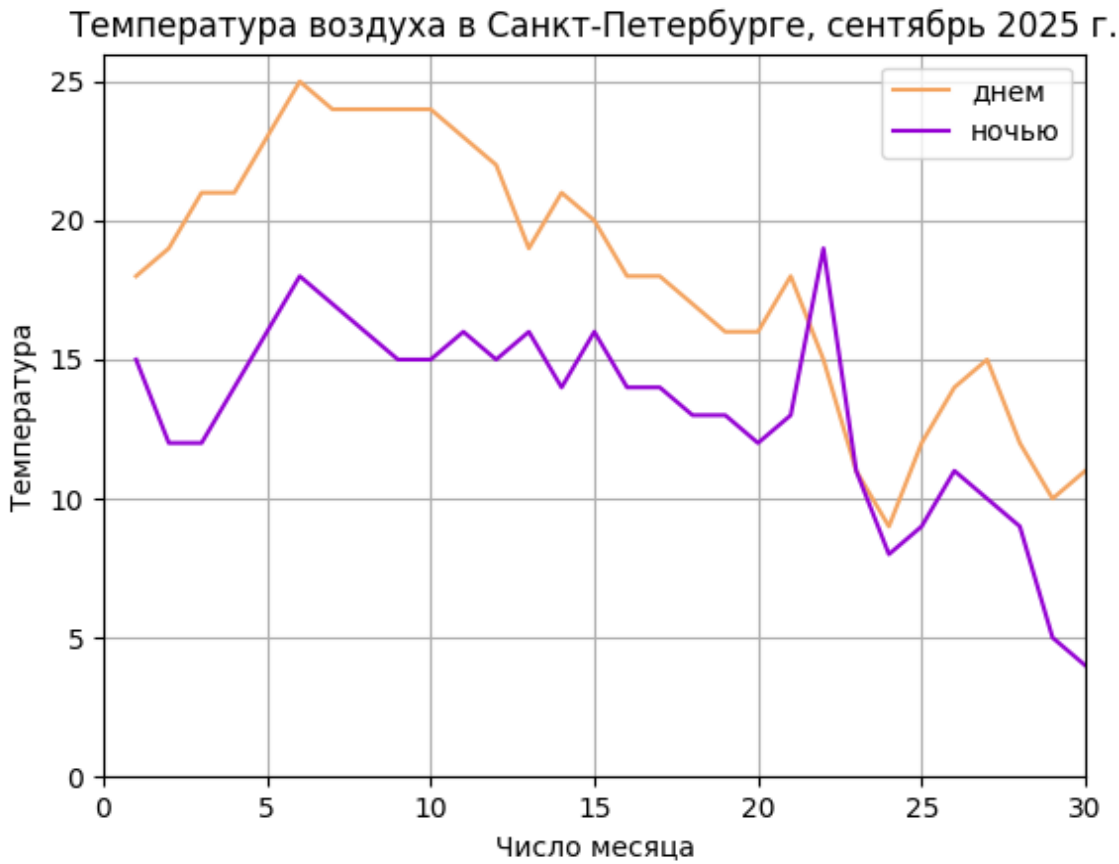
9-th St. Petersburg Youth Conference in Probability and Mathematical Physics,
Санкт-Петербург, 17-20 ноября 2025

ВПГВ



ВПИС




Температура воздуха в Санкт-Петербурге, сентябрь 2025 г.
днем
ночью
Температура
Число месяца
0
5
10
15
20
25
30

Голубянка икар

Два типа случайности

- Случайность, связанная со средой (например, температура).

Два типа случайности

- Случайность, связанная со средой (например, температура).
- При фиксированной среде (конкретный набор температур в Санкт-Петербурге в сентябре 2025 года) есть случайность, связанная с тем, как именно особи голубянки икар будут размножаться при *известных* законах размножения.

Случайная среда

Пусть $\mathbf{\Pi} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ – последовательность случайных величин такая, что

$$p_j \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \text{ п.н..}$$

Случайная среда

Пусть $\mathbf{\Pi} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ – последовательность случайных величин такая, что

$$p_j \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \text{ п.н..}$$

С $\mathbf{\Pi}$ свяжем производящую функцию

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n.$$

Случайная среда

Пусть $\mathbf{\Pi} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ – последовательность случайных величин такая, что

$$p_j \geq 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \text{ п.н..}$$

С $\mathbf{\Pi}$ свяжем производящую функцию

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n.$$

Пусть $\mathbf{\Pi}_1, \mathbf{\Pi}_2, \ldots$ – независимые копии $\mathbf{\Pi}$, $f_1, f_2, \ldots$ – соответствующие им производящие функции. Последовательность $\boldsymbol{f} = \{f_1, f_2, \ldots\}$ будем называть **случайной средой**.

Ветвящийся процесс в случайной среде

Определение

Последовательность случайных величин $\{Z_n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $Z_0 = 1$ *называется ветвящимся процессом в случайной среде* $\boldsymbol{f} = \{f_1, f_2, \ldots\}$ *(ВПСС), если*

$$\mathbb{E}_f s^{Z_n} := \mathbb{E}\left(s^{Z_n} \middle| \boldsymbol{f}\right) = \mathbb{E}\left(s^{Z_n} \middle| f_1, f_2, \ldots\right) = f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n(s).$$

ВПСС

При фиксированной среде ветвящийся процесс в случайной среде есть ветвящийся процесс в изменяющейся среде:

$$\mathbb{E}_f Z_n = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \ln f_j'(1)\right).$$

ВПСС

При фиксированной среде ветвящийся процесс в случайной среде есть ветвящийся процесс в изменяющейся среде:

$$\mathbb{E}_f Z_n = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \ln f_j'(1)\right).$$

В силу определения случайной среды случайные величины $\ln f_j'(1)$ одинаково распределены и независимы при $j \geq 1$. Положим $X_j := \ln f_j'(1)$, $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$ при $n \in \mathbb{N}$, где $S_0 = 0$.

ВПСС

При фиксированной среде ветвящийся процесс в случайной среде есть ветвящийся процесс в изменяющейся среде:

$$\mathbb{E}_f Z_n = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \ln f_j'(1)\right).$$

В силу определения случайной среды случайные величины $\ln f_j'(1)$ одинаково распределены и независимы при $j \geq 1$. Положим $X_j := \ln f_j'(1)$, $S_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$ при $n \in \mathbb{N}$, где $S_0 = 0$. Последовательность $\{S_n\}$ есть случайное блуждание, которое называют сопровождающим для ветвящегося процесса в случайной среде.

Классификация ВПСС

В случае, когда $m = \mathbb{E} \ln f_1'(1) < \infty$ принята следующая классификация ветвящихся процессов в случайной среде.

Классификация ВПСС

В случае, когда $m = \mathbb{E} \ln f_1'(1) < \infty$ принята следующая классификация ветвящихся процессов в случайной среде. ВПСС $\{Z_n\}$ называется

$$\text{до}\text{критическим, если } m < 0,$$
$$\text{критическим, если } m = 0,$$
$$\text{над}\text{критическим, если } m > 0.$$

Асимтотическое соотношения для вероятностей невырождения ВПСС

Для критического ВПСС справедливы асимптотические соотношения

$$\boldsymbol{P}\left(Z_n > 0\right) \sim C\boldsymbol{P}\left(S_j > 0,\, j \le n\right) \sim \frac{\widehat{C}}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty,$$

где $C, \widehat{C}$ – некоторые константы.

Асимтотическое соотношения для вероятностей невырождения ВПСС

Для критического ВПСС справедливы асимптотические соотношения

$$\boldsymbol{P}\left(Z_n > 0\right) \sim C\boldsymbol{P}\left(S_j > 0,\, j \le n\right) \sim \frac{\widehat{C}}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty,$$

где $C, \widehat{C}$ – некоторые константы.

- П.ф. f_n – дробно-линейные, М.В. Козлов в статье [1], 1976.

Асимтотическое соотношения для вероятностей невырождения ВПСС

Для критического ВПСС справедливы асимптотические соотношения

$$\boldsymbol{P}\left(Z_n > 0\right) \sim C\boldsymbol{P}\left(S_j > 0,\, j \le n\right) \sim \frac{\widehat{C}}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty,$$

где $C, \widehat{C}$ – некоторые константы.

- П.ф. f_n – дробно-линейные,
  М.В. Козлов в статье [1], 1976.
- Общий вид п.ф. f_n,
  Й. Гейгер, Г. Кёрстинг в статье [2], 2001;
  В.И. Афанасьев, В.А. Ватутин, Й. Гейгер, Г. Кёрстинг в [3], 2005.

Переход к блужданию и бутылочное горлышко эволюции

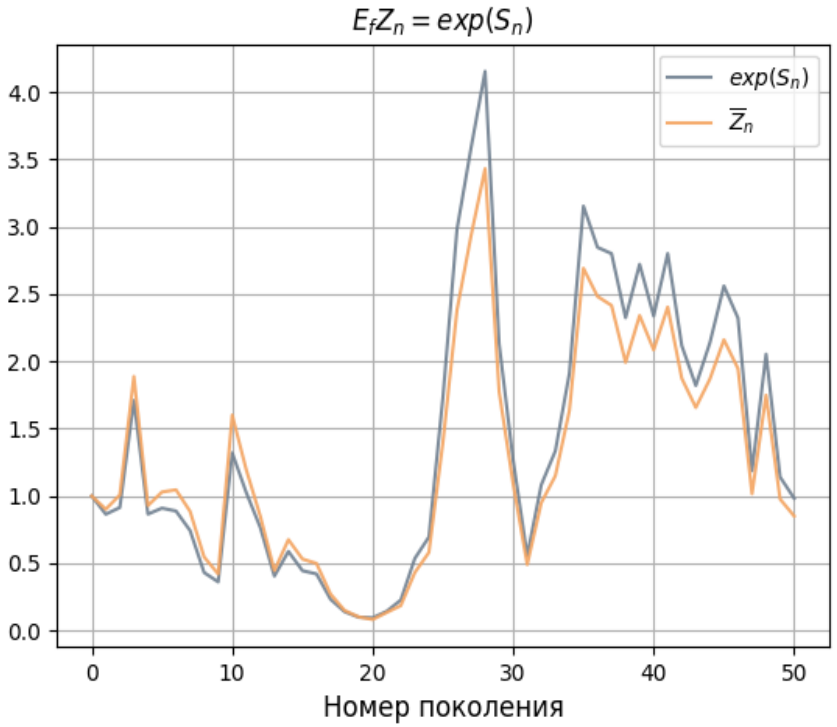
При всяком натуральном n справедливы соотношения:

$$\mathbb{E}_f Z_n = \exp(S_n), \quad \boldsymbol{P}_f\left(Z_n > 0\right) \leq \exp\left(\min_{0\leq i\leq n} S_i\right).$$

Переход к блужданию и бутылочное горлышко эволюции

При всяком натуральном n справедливы соотношения:

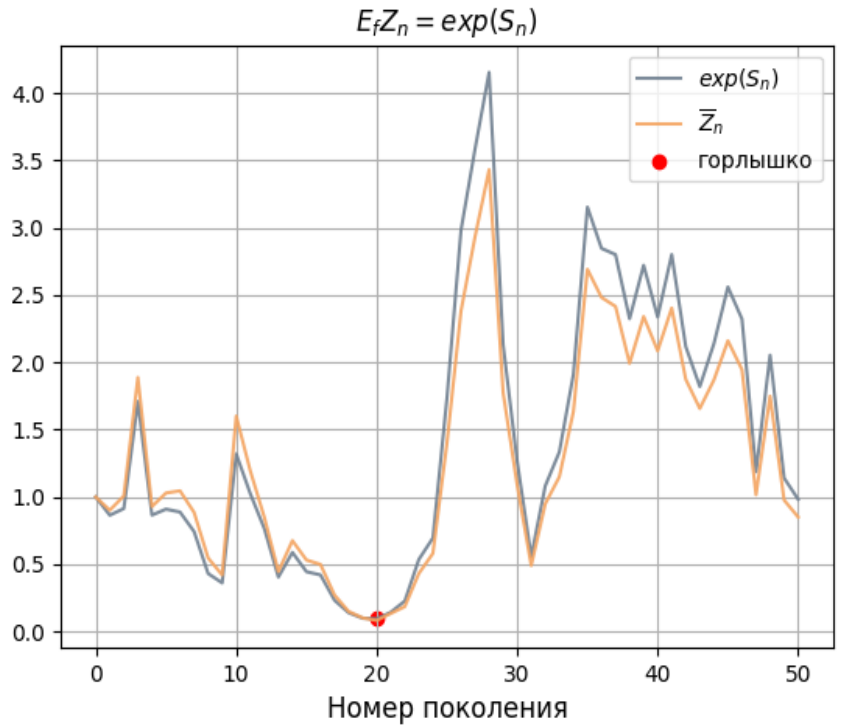
$$\mathbb{E}_f Z_n = \exp(S_n), \quad \boldsymbol{P}_f\left(Z_n > 0\right) \leq \exp\left(\min_{0\leq i\leq n} S_i\right).$$



Переход к блужданию и бутылочное горлышко эволюции

При всяком натуральном n справедливы соотношения:

$$\mathbb{E}_f Z_n = \exp(S_n), \quad \boldsymbol{P}_f\left(Z_n > 0\right) \leq \exp\left(\min_{0 \leq i \leq n} S_i\right).$$



Биологическая интерпретация

Биологическая интерпретация

Голубянка икар

Людорфия японская

Среда

Пусть

$$\Pi^{(1)} = \left\{p_n^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad \Pi^{(2)} = \left\{p_n^{(2)}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$$ посл. случайных величин

такие, что

Среда

Пусть

$$\Pi^{(1)} = \left\{p_n^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad \Pi^{(2)} = \left\{p_n^{(2)}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$$ посл. случайных величин

такие, что

$$p_j^{(i)} \geq 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(i)} = 1 \text{ п.н.}, \quad i = 1, 2.$$

Среда

Пусть

$$\Pi^{(1)} = \left\{p_n^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad \Pi^{(2)} = \left\{p_n^{(2)}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$$ посл. случайных величин

такие, что

$$p_j^{(i)} \geq 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(i)} = 1 \text{ п.н.}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть также

$$f^{(i)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(i)} s^n, \quad i = 1, 2.$$

Среда

Пусть

$$\Pi^{(1)} = \left\{p_n^{(1)}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}, \quad \Pi^{(2)} = \left\{p_n^{(2)}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ посл. случайных величин}$$

такие, что

$$p_j^{(i)} \geq 0, \ \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(i)} = 1 \text{ п.н.}, \quad i = 1, 2.$$

Пусть также

$$f^{(i)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n^{(i)} s^n, \quad i = 1, 2.$$

Положим

$\mathbf{\Pi} = \{\Pi_1, \Pi_2, \ldots\}$, где Π_n – независимые копии $\left(\Pi^{(1)}, \Pi^{(2)}\right)$,

$\boldsymbol{f} = \left\{\left(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}\right), \left(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}\right), \ldots\right\}$ – *случайная среда*.

ПВПСС

Случайный процесс

$$\left\{ \boldsymbol{Z_n} = \left(Z_n^{(1)}, Z_n^{(2)} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}_0}, \quad Z_0^{(j)} = 1, \; j = 1, 2,$$

назовем парой ветвящихся процессов в общей случайной среде $\boldsymbol{f}$, если при фиксации среды $\boldsymbol{f}$ ветвящиеся процессы $\left\{ Z_n^{(j)}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$, $j = 1, 2$, являются независимыми ветвящимися процессами Гальтона-Ватсона в изменяющейся среде, где п.ф. числа потомков одной частицы n-го поколении j-й популяции есть $f_n^{(j)}$, $j = 1, 2$.

Сопровождающее блуждание

Процессу $\{\boldsymbol{Z_n}\}$ можно сопоставить двумерное сопровождающее блуждание с шагами

$$\overline{X}_i = \left(\ln \left(f_i^{(1)} \right)' (1), \ln \left(f_i^{(2)} \right)' (1) \right).$$

Сопровождающее блуждание

Процессу $\{\boldsymbol{Z_n}\}$ можно сопоставить двумерное сопровождающее блуждание с шагами

$$\overline{X}_i = \left(\ln \left(f_i^{(1)} \right)' (1), \ln \left(f_i^{(2)} \right)' (1) \right).$$

Будем говорить, что процесс $\{\boldsymbol{Z_n}\}$ является критическим, если

$$\mathbb{E}\overline{X}_i = 0.$$

Теорема

Пусть $\{\boldsymbol{Z_n}\}$ *– критическая ПВПСС,* $\{\overline{S}_n\}$ *– ее сопровождающее блуждание с шагами* $\overline{X}_i = \left(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}\right)$, $i \in \mathbb{N}$. *Положим*

$$\xi_k^{(j)} := \frac{\left(f_{k+1}^{(j)}\right)''(1)}{\left(\left(f_{k+1}^{(j)}\right)'(1)\right)^2}, \quad j = 1, 2;\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть $\mathbb{E}\left|\overline{X}_i\right|^2 \ln\left(1 + \left|\overline{X}_i\right|\right) < \infty$, $\operatorname{corr}\left(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}\right) =: \rho \in (0, 1)$, $\mathbb{E}\left(\xi_1^{(1)}\right)^q < \infty$, $\mathbb{E}\left(\xi_1^{(2)}\right)^q < \infty$ *при некотором* $q > 0$. *Тогда*

$$\boldsymbol{P}\left(Z_n^{(1)} > 0, Z_n^{(2)} > 0\right) \sim \frac{C}{n^{p/2}},\ n \to \infty, \quad p = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)}.$$

В силу независимости случайных величин $Z_n^{(1)}$ и $Z_n^{(2)}$ для всякого n при условии среды

$$\boldsymbol{P}_f\left(\boldsymbol{Z_n} > 0\right) = \boldsymbol{P}_f\left(Z_n^{(1)} > 0\right)\boldsymbol{P}_f\left(Z_n^{(2)} > 0\right) \leq$$

$$\leq \exp\left(\min_{0\leq i\leq n} S_i^{(1)} + \min_{0\leq i\leq n} S_i^{(2)}\right).$$

В силу независимости случайных величин $Z_n^{(1)}$ и $Z_n^{(2)}$ для всякого n при условии среды

$$\boldsymbol{P}_f\left(\boldsymbol{Z_n} > 0\right) = \boldsymbol{P}_f\left(Z_n^{(1)} > 0\right)\boldsymbol{P}_f\left(Z_n^{(2)} > 0\right) \leq$$

$$\leq \exp\left(\min_{0\leq i\leq n} S_i^{(1)} + \min_{0\leq i\leq n} S_i^{(2)}\right).$$

Кроме того

$$\mathbb{E}_f Z_n^{(i)} = \exp\left(S_n^{(i)}\right),\ n \in \mathbb{N}, i = 1, 2.$$

В силу независимости случайных величин $Z_n^{(1)}$ и $Z_n^{(2)}$ для всякого n при условии среды

$$\boldsymbol{P}_f\left(\boldsymbol{Z_n} > 0\right) = \boldsymbol{P}_f\left(Z_n^{(1)} > 0\right)\boldsymbol{P}_f\left(Z_n^{(2)} > 0\right) \leq$$

$$\leq \exp\left(\min_{0\leq i\leq n} S_i^{(1)} + \min_{0\leq i\leq n} S_i^{(2)}\right).$$

Кроме того

$$\mathbb{E}_f Z_n^{(i)} = \exp\left(S_n^{(i)}\right),\ n \in \mathbb{N}, i = 1, 2.$$

$$\boldsymbol{P}\left(S_j > 0, j \leq n\right) \sim \frac{C}{\sqrt{n}},\ n \to \infty.$$

В силу независимости случайных величин $Z_n^{(1)}$ и $Z_n^{(2)}$ для всякого n при условии среды

$$\boldsymbol{P}_f\left(\boldsymbol{Z_n} > 0\right) = \boldsymbol{P}_f\left(Z_n^{(1)} > 0\right)\boldsymbol{P}_f\left(Z_n^{(2)} > 0\right) \leq$$

$$\leq \exp\left(\min_{0\leq i\leq n} S_i^{(1)} + \min_{0\leq i\leq n} S_i^{(2)}\right).$$

Кроме того

$$\mathbb{E}_f Z_n^{(i)} = \exp\left(S_n^{(i)}\right),\ n \in \mathbb{N}, i = 1, 2.$$

$$\boldsymbol{P}\left(S_j > 0, j \leq n\right) \sim \frac{C}{\sqrt{n}},\ n \to \infty.$$

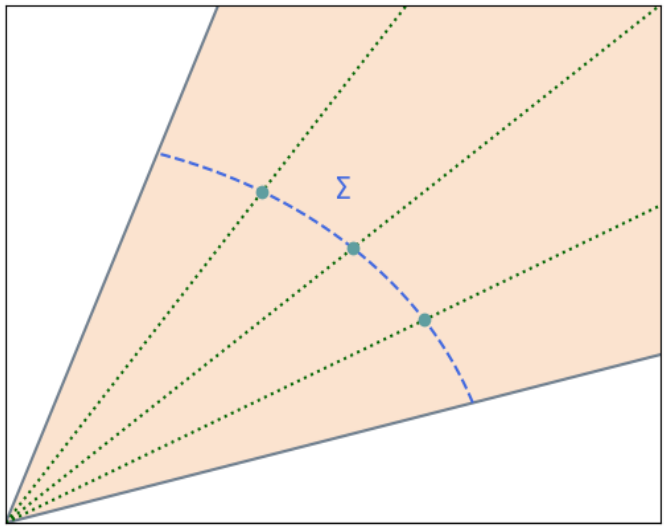
$$\boldsymbol{P}\left(S_j^{(1)} > 0, S_j^{(2)} > 0, j \leq n\right) \sim ?,\ n \to \infty.$$

Определение

Говорим, что $K \subset \mathbb{R}^d$ *есть конус, если существует* $\Sigma \subset \mathbb{S}^{d-1}$ *– открытое и связное множество, что* K *есть объединение всех лучей, выпущенных из начала координат и проходящих через точки множества* Σ.

Определение

Говорим, что $K \subset \mathbb{R}^d$ есть конус, если существует $\Sigma \subset \mathbb{S}^{d-1}$ – открытое и связное множество, что K есть объединение всех лучей, выпущенных из начала координат и проходящих через точки множества Σ.



Пример конуса в $\mathbb{R}^2$

Момент выхода случайного блуждания из конуса

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ – конус. Для всякого $\overline{x} \in K$ положим

$$\tau(\overline{x}) := \inf\left\{n \in \mathbb{N} : \overline{x} + \overline{S}_n \notin K\right\}.$$

Таким образом, $\tau(\overline{x})$ – момент выхода блуждания с начальной точкой $\overline{x}$ из конуса K.

Теорема (Д. Денисов и В. Вахтель, [4])

При некоторых условиях на случайное блуждание и конус $K \subset \mathbb{R}^d$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\boldsymbol{P}\left(\tau(\overline{x}) > n\right) \sim \frac{\varkappa V(\overline{x})}{n^{p/2}}, \quad n \to \infty,$$

где $\overline{x} \in K$, $\varkappa$ – некоторая константа, $p = p(\Lambda, d)$, Λ – собственные числа оператора Лапласа – Бельтрами на Σ, $V(\overline{x})$ – функция, явный вид которой можно найти в [4].

Теорема (Д. Денисов и В. Вахтель, [4])

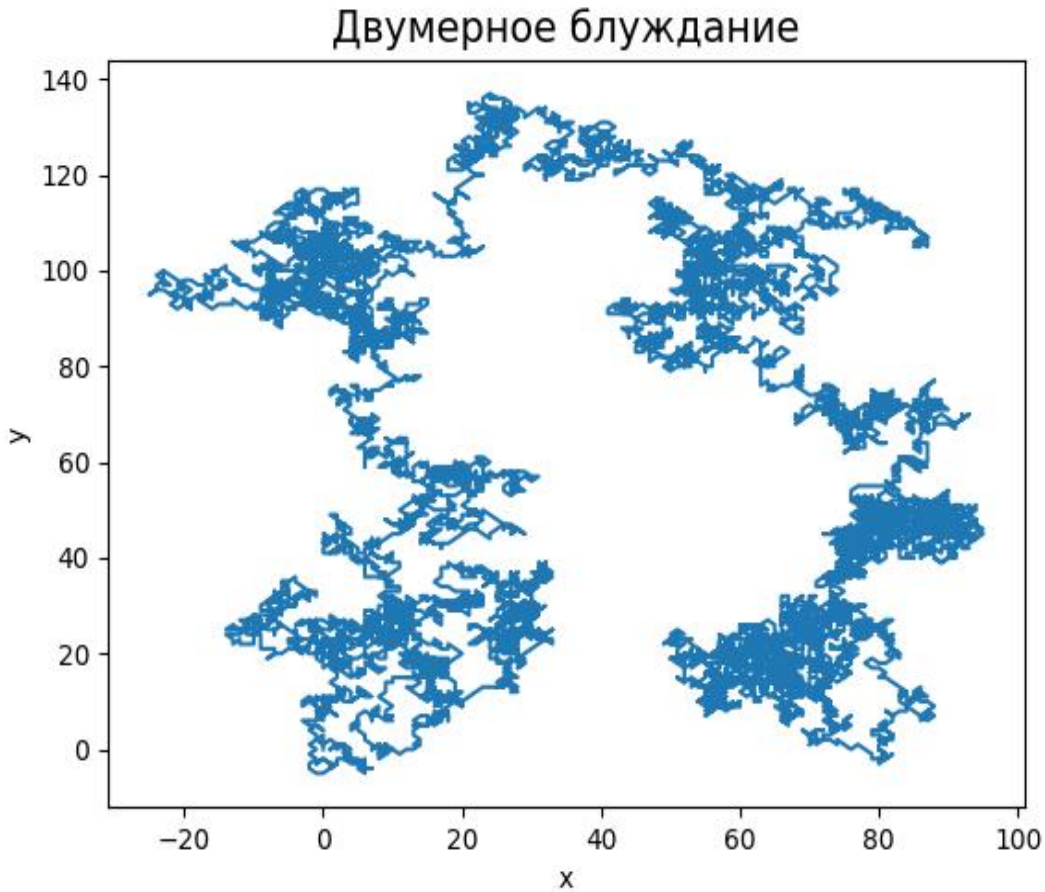
При некоторых условиях на случайное блуждание и конус $K \subset \mathbb{R}^d$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\boldsymbol{P}\left(\tau(\overline{x}) > n\right) \sim \frac{\varkappa V(\overline{x})}{n^{p/2}}, \quad n \to \infty,$$

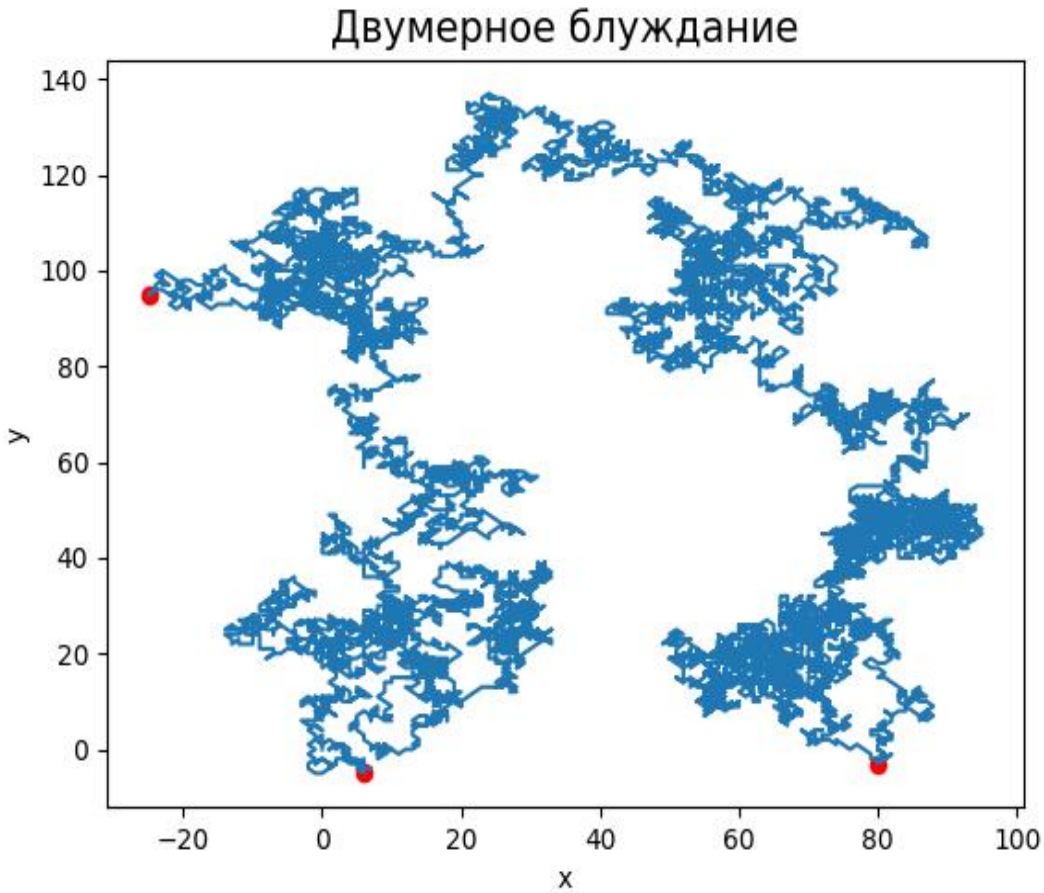
где $\overline{x} \in K$, $\varkappa$ – некоторая константа, $p = p(\Lambda, d)$, Λ – собственные числа оператора Лапласа – Бельтрами на Σ, $V(\overline{x})$ – функция, явный вид которой можно найти в [4].

$$p = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)}.$$

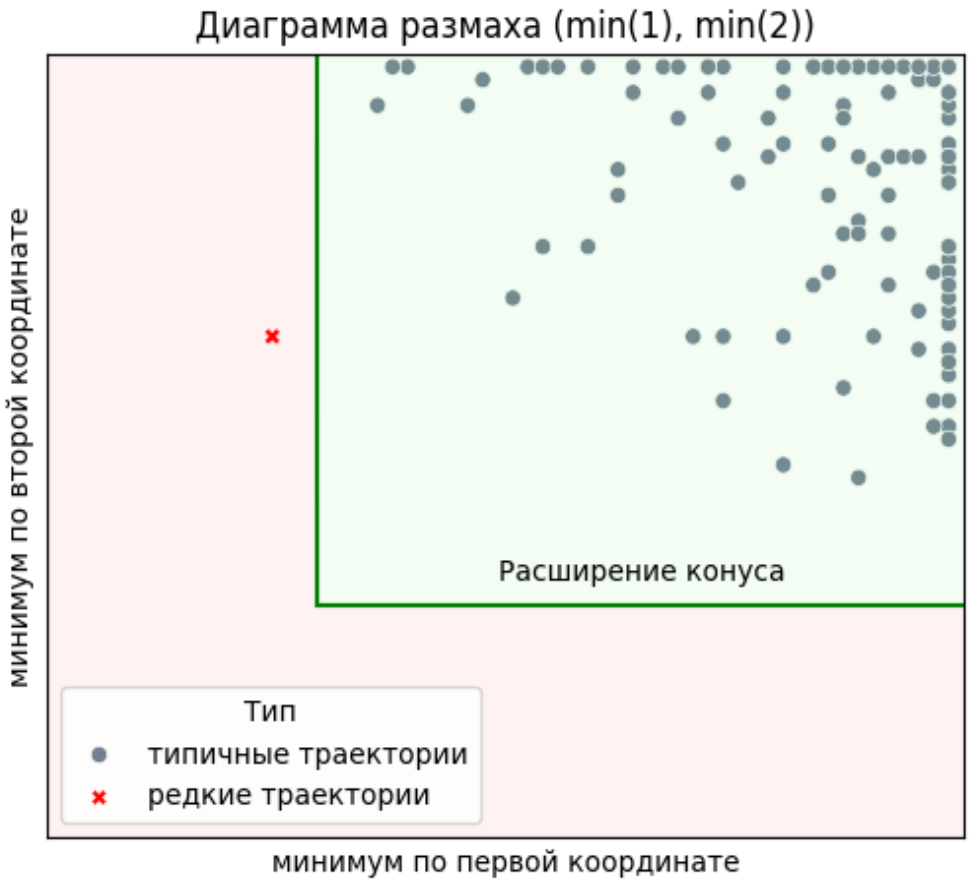
Бутылочное горлышко для ПВПСС



Бутылочное горлышко для ПВПСС



Расширение конуса



Пусть $\tau(\overline{t})$ – момент выхода сопровождающего блуждания ПВПСС с начальной точкой $\overline{t}$ из первого квадранта.

Пусть $\tau(\bar{t})$ – момент выхода сопровождающего блуждания ПВПСС с начальной точкой $\bar{t}$ из первого квадранта. Пусть $\bar{t} = (t, t)$, где $t > 0$. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z_n} > 0\right) = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z_n} > 0, \tau(\bar{t}) \leq n\right) + \\ + \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z_n} > 0 \,|\tau(\bar{t}) > n\right) \boldsymbol{P}\left(\tau(\bar{t}) > n\right). \end{aligned}$$

Утверждение

Для всякого положительного числа ε существует такое положительное число T, что при всех $t > T$ имеет место неравенство

$$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{Z_n} > 0, \tau(\bar{t}) \leq n\right) \leq \frac{\varepsilon}{n^{p/2}},$$

где $\bar{t} = (t, t)$.

Вероятность невырождения при условии “положительности” сопровождающего блуждания

Для доказательства теоремы об асимптотике невырождения ПВПСС достаточно показать

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z_n} > 0 \middle| \tau(\bar{t}) > n\right) > 0.$$

Вероятность невырождения при условии "положительности" сопровождающего блуждания

Для доказательства теоремы об асимптотике невырождения ПВПСС достаточно показать

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z_n} > 0 \middle| \tau(\bar{t}) > n\right) > 0.$$

Справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z_n} > 0 \middle| \tau(\bar{t}) > n\right) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{t}}^{+} \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}_f\left(\boldsymbol{Z_n} > 0\right),$$

где $\mathbb{E}_{\boldsymbol{t}}^{+}$ – математическое ожидание по мере $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{t}}^{+}$, построенной по функции V.

Вероятность невырождения при условии среды

- Случай геометрических производящих функций. Справедливо представление

$$\boldsymbol{P}_f\left(\boldsymbol{Z_n} > 0\right) = \prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\exp\left(-S_k^{(j)}\right)\right)^{-1}.$$

Вероятность невырождения при условии среды

- Случай геометрических производящих функций. Справедливо представление

$$\boldsymbol{P}_f\left(\boldsymbol{Z_n} > 0\right) = \prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\exp\left(-S_k^{(j)}\right)\right)^{-1}.$$

- Случай произвольных производящих функций. Имеет место соотношение

$$\boldsymbol{P}_f\left(\boldsymbol{Z_n} > 0\right) \geq \prod_{j=1}^{2}\left(\exp\left(-S_n^{(j)}\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^{(j)}\exp\left(-S_k^{(j)}\right)\right)^{-1}.$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{Z_n} > 0 \middle| \tau(\bar{t}) > n\right) \geq \mathbb{E}_{\boldsymbol{t}}^{+}\left[\prod_{j=1}^{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k^{(j)}\exp\left(-S_k^{(j)}\right)\right)^{-1}\right] > 0.$$

Спасибо за внимание!

Теорема

Пусть $\{\boldsymbol{Z_n}\}$ *– критическая ПВПСС,* $\{\overline{S}_n\}$ *– ее сопровождающее блуждание с шагами* $\overline{X}_i = \left(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}\right)$, $i \in \mathbb{N}$. *Положим*

$$\xi_k^{(j)} := \frac{\left(f_{k+1}^{(j)}\right)''(1)}{\left(\left(f_{k+1}^{(j)}\right)'(1)\right)^2}, \quad j = 1, 2;\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть $\mathbb{E}\left|\overline{X}_i\right|^2 \ln\left(1 + \left|\overline{X}_i\right|\right) < \infty$, $\operatorname{corr}\left(X_i^{(1)}, X_i^{(2)}\right) =: \rho \in (0, 1)$, $\mathbb{E}\left(\xi_1^{(1)}\right)^q < \infty$, $\mathbb{E}\left(\xi_1^{(2)}\right)^q < \infty$ *при некотором* $q > 0$. *Тогда*

$$\boldsymbol{P}\left(Z_n^{(1)} > 0, Z_n^{(2)} > 0\right) \sim \frac{C}{n^{p/2}},\ n \to \infty, \quad p = \frac{\pi}{\arccos(-\rho)}.$$

Козлов М. В. Об асимптотике вероятности невырождения критических ветвящихся процессов в случайной среде //Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – Т. 21. – №. 4. – С. 813-825.

Geiger J., Kersting G. The survival probability of a critical branching process in a random environment //Theory of Probability & Its Applications. – 2001. – Т. 45. – №. 3. – С. 517-525.

Afanasyev V. I. et al. Criticality for branching processes in random environment. – 2005.

Denisov D., Wachtel V. Random walks in cones revisited //Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probabilites et statistiques. – Institut Henri Poincaré, 2024. – Т. 60. – №. 1. – С. 126-166..