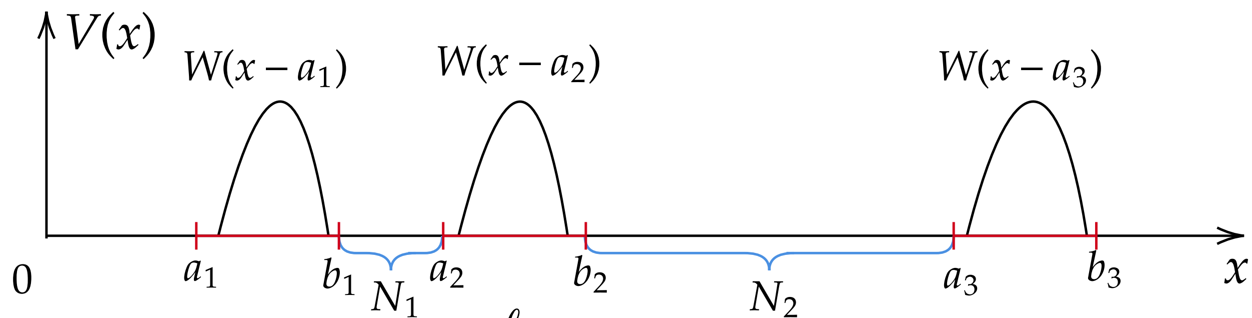
Оператор Шредингера с самоподобными свойствами

Николай Андронов

СПбГУ

Результаты Д. Пирсона, 1978

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \text{ в } L_2(\mathbb{R}_+) \text{ с условием Дирихле в нуле}$$



$$a_\ell = (\ell - 1)d + \sum_{j=1}^{\ell} N_j, \quad b_\ell = a_\ell + d, \quad W \in L_1(\mathbb{R}_+)$$

Теорема 1. *Если* $\{N_j\}$ *растут достаточно быстро, то у оператора есть сингулярно непрерывный спектр.*

Условия на рост $\{N_j\}$ **крайне неявные**
Нет анализа обобщенных собственных функций

Изучаемый оператор

$$H_\lambda \psi := -\frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta(x - x_\ell)\psi$$

$$x_\ell = a\ell^2/2 + b\ell + c, \quad \lambda > 0,\ a, b \in (0,1),\ c \in \mathbb{R}$$

действует в $L_2(\mathbb{R}_+)$ с условием Дирихле в нуле

С. Альбеверио, Ф. Гестези и др. (1991):

$$D(H_\lambda) = \{\psi \in W_2^1(\mathbb{R}_+) \cap W_2^2(\mathbb{R}_+ \setminus \{x_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}) : \\ \psi'(x_\ell+) - \psi'(x_\ell-) = \lambda\psi(x_\ell), \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots\}$$

Начали исследовать А. А. Федотов и F. Klopp

Сведение к системе разностных уравнений

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \lambda \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta(x - x_\ell)\psi = E\psi, \qquad E > 0$$

$$x \in (x_\ell, x_{\ell+1}): \qquad \psi(x) = A_\ell e^{ikx} + B_\ell e^{-ikx}, \qquad k = \sqrt{E}$$

$$\begin{cases} \psi(x_\ell + 0) = \psi(x_\ell - 0), \\ \psi'(x_\ell + 0) - \psi'(x_\ell - 0) = \lambda\psi(x_\ell) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A_{\ell+1} \\ B_{\ell+1} \end{pmatrix} = M(\ell) \begin{pmatrix} A_\ell \\ B_\ell \end{pmatrix}, \qquad \ell = -1, 0, 1, 2, \ldots$$

$$M(\ell) = I + \frac{\lambda}{2ik} \begin{pmatrix} 1 & e^{-2ikx_{\ell+1}} \\ -e^{2ikx_{\ell+1}} & -1 \end{pmatrix}$$

Уравнение 2-го порядка

$$\omega = \frac{ka}{\pi}, \quad k = \sqrt{E},$$

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{4k^2}}, \quad \theta = \frac{\omega}{2} + \frac{kb}{\pi} - \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda}{2k}\right) + \frac{1}{2},$$

Теорема 2. ψ — *решение исходного* $\iff$

$$\psi_{\ell+1} + \psi_{\ell-1} - 2e^{i\pi\omega/2}\nu \sin(\pi(\omega\ell + \theta))\psi_\ell = 0$$

$$\psi_\ell = e^{i\frac{\omega}{2}\ell^2 - i(\frac{\omega}{2} - kb + \pi\beta)\ell} A_\ell$$

Теорема 3.

$$\psi \in L_2(\mathbb{R}_+) \iff \sum_{\ell=1}^{\infty} |\psi_\ell|^2 \ell < \infty.$$

Наивная попытка построить решение

$$\psi_\ell = e^{i\pi\omega\ell^2/2} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ix\ell} dx, \quad f(x+2\pi) = f(x),$$

$$f(x+\pi\omega)(e^{-ix} - \nu e^{i\pi\theta}) = f(x-\pi\omega)(\nu e^{-i\pi\theta} - e^{ix}),$$

$$\ln f(x+\pi\omega) - \ln f(x-\pi\omega) = (\pi i - 2\pi i\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\cos n(x+\pi\theta)}{n\nu^n},$$

$$f(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sin(n\pi\omega) n\nu^n}\right), \quad |\nu| > 1,$$

$$\frac{2b-a}{a}\pi\omega + 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\lambda a}{2\pi\omega}\right) = \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Совершенно неясно, будет ли ω диофантовым числом

Перенормировочная формула

$$\mathcal{F}_{\ell+1} = \mathbb{M}(\omega\ell + \theta, \nu)\mathcal{F}_{\ell}, \quad \ell \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbb{M}(x,\nu) = \begin{pmatrix} 2\nu\sin(\pi x) & -e^{-i\pi x} \\ e^{i\pi x} & 0 \end{pmatrix}$$

$\psi_\ell = (\mathcal{F}_\ell)_1 e^{i\pi\omega\ell/2}$ — решение уравнения 2-го порядка

Пусть $\mathcal{F}_0(\omega,\theta,\nu) = I$

Теорема 4. *Существует* $\Phi : \mathbb{R} \to SL(2,\mathbb{C})$ *такое, что*

$$\Phi(x+\omega) = \mathbb{M}(x,\nu)\Phi(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}_N(\omega,\theta,\nu) = \pm\Phi(\{\theta + N\omega\})\sigma_2\mathcal{F}_{N_1}(\omega_1,\theta_1,\nu_1)\sigma_2\Phi^{-1}(\theta),$$

$$N_1 = -\left[\theta + N\omega\right], \quad \omega_1 = \{1/\omega\}, \quad \theta_1 = \{\theta/\omega\}, \quad \nu_1 = \nu^{1/\omega}.$$

Об идеях доказательства

$$\Phi(x+\omega) = M(x)\Phi(x), \quad M(x+1) = -M(x),$$

$$\det\Phi(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Psi(x) = \Phi(x)p(x), \quad p(x+\omega) = p(x)$$

$$\det\Phi(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x+2),\, \Phi(x+1)\Gamma\left(\frac{x}{\omega}\right) \text{ — решения}$$

$$\Gamma(x) = \begin{pmatrix} e^{i\pi x} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi x} \end{pmatrix}$$

$$\Phi_1(x+\omega_1) = \mathcal{M}(x)\Phi_1(x), \quad \omega_1 = \left\{\frac{1}{\omega}\right\},$$

$$M_1(x) = \Gamma^{-1}(x)p^t(\omega x), \quad \mathcal{M}(x) = M_1\left(x+\frac{1}{\omega}\right)M_1(x)$$

О построении фундаментального решения

V. Buslaev, A. Fedotov, 2001.

$$m(z+h) + m(z-h) + 2e^{\xi}\cos(z)m(z) = 0, \quad \mathrm{Re}\,\xi \neq 0$$

m — минимальное целое решение

$$m(z+\pi) - m(z-\pi)e^{-\frac{i\pi^2}{h}} - 2e^{\frac{\pi\xi}{h}}\sin\left(\frac{z\pi}{h} - \frac{\pi^2}{2h}\right)m(z) = 0$$

Выбор Φ — выбор базиса во множестве решений

Спасибо за внимание!