Спектральная задача для модели Кронига–Пенни оператора Дирака в терминах алгоритма Шура

Павел Губкин,
ПОМИ РАН

20 ноября 2025

Оператор Дирака на полуоси

Оператор Дирака $\mathcal{D}_q$ на $\mathbb{R}_+$ с потенциалом $q \in L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$\mathcal{D}_q : X \mapsto JX' + QX, \qquad Q = \begin{pmatrix} \operatorname{Im} q & \operatorname{Re} q \\ \operatorname{Re} q & -\operatorname{Im} q \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}_q \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} f_1' \\ f_2' \end{pmatrix} + Q \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Функция Вейля оператора Дирака

Уравнение на обобщенные собственные функции

$$\mathcal{D}_q f = \lambda f, \qquad Jf' + Qf = \lambda f.$$

Фундаментальное решение $N = \left(\begin{smallmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{smallmatrix}\right)$ удовлетворяет

$$JN'(x,z) + Q(x)N(x,z) = zN(x,z), \quad N(0,z) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция Вейля оператора Дирака

Уравнение на обобщенные собственные функции

$$\mathcal{D}_q f = \lambda f, \qquad Jf' + Qf = \lambda f.$$

Фундаментальное решение $N = \left(\begin{smallmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{smallmatrix}\right)$ удовлетворяет

$$JN'(x,z) + Q(x)N(x,z) = zN(x,z), \quad N(0,z) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция Вейля $m_q \colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}_+$ оператора $\mathcal{D}_q$ определяется как

$$m_q(z) = \lim_{x \to +\infty} \frac{n_{22}(x,z)}{n_{21}(x,z)}, \qquad z \in \mathbb{C}_+.$$

Функция Шура $f_q \colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{D}$ задаётся формулой

$$f_q = \frac{m_q - i}{m_q + i}.$$

Канонические системы

Каноническая система на $\mathbb{R}_+$ — это дифференциальное уравнение

$$JX'(x,z) = z\mathcal{H}(x)X(x,z), \qquad x \in \mathbb{R}_+, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $\mathcal{H}$ — гамильтониан,

$$\mathcal{H} : x \mapsto \begin{pmatrix} h_1 & h \\ h & h_2 \end{pmatrix}, \quad h, h_1, h_2 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+), \quad \mathcal{H}(x) \geqslant 0.$$

Фундаментальное решение M удовлетворяет

$$JM'(x,z) = z\mathcal{H}(x)M(x,z), \quad M(0,z) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Если $\mathcal{H} \notin L^1(\mathbb{R}_+)$, то можно определить функцию Вейля $m_{\mathcal{H}}$:

$$m_{\mathcal{H}}(z) = \lim_{x \to +\infty} \frac{M_{22}(x,z)}{M_{21}(x,z)}, \quad z \in \mathbb{C}_+.$$

Сведение системы Дирака к канонической гамильтоновой системе

Система Дирака и каноническая система:

$$JN' + QN = zN, \qquad JM' = z\mathcal{H}M.$$

Определим $N_q(x)$ как решение $JN_q'(x) + Q(x)N_q(x) = 0$ и положим

$$\mathcal{H}_q(x) = N_q^*(x)N_q(x), \qquad x \geqslant 0.$$

Тогда матрица $M(x,z) = N_q^{-1}(x)N(x,z)$ является решением канонической системы с гамильтонианом $\mathcal{H}_q$.

Как найти функцию Вейля?

Напрямую:

- решить дифференциальное уравнение $JN' + QN = zN$;
- вычислить функцию Вейля по формуле $m_q(z) = \lim_{x \to +\infty} \frac{n_{22}(x,z)}{n_{21}(x,z)}$.

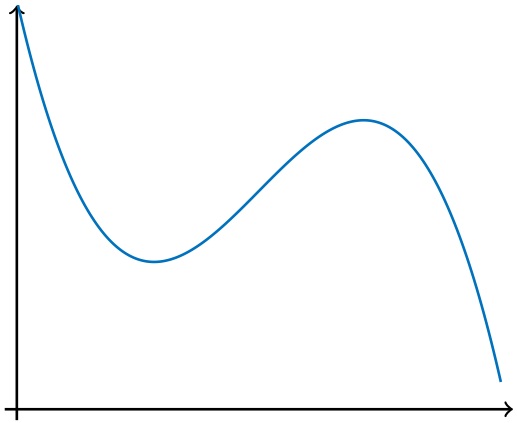
Переходом к канонической системе:

- решить дифференциальное уравнение $JN_q' + QN_q = 0$;
- построить каноническую систему с гамильтонианом $\mathcal{H}_q = N_q^* N_q$;
- найти фундаментальное решение $JM'(x,z) = z\mathcal{H}(x)M(x,z)$;
- вычислить функцию Вейля по формуле $m(z) = \lim_{x \to +\infty} \frac{M_{22}(x,z)}{M_{21}(x,z)}$.

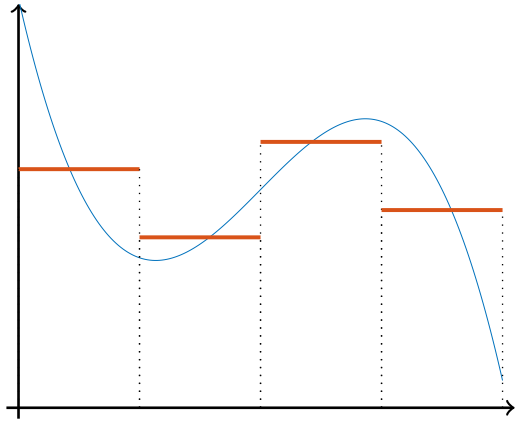
Дискретизация

$$JN' + QN = zN, \quad JN'_q + QN_q = 0, \quad JM' = z\mathcal{H}_q M, \quad \mathcal{H}_q = N_q^* N_q.$$

Потенциал q

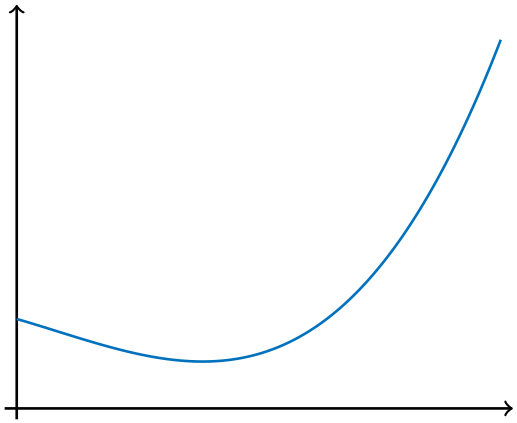


Усредненный потенциал q_ℓ

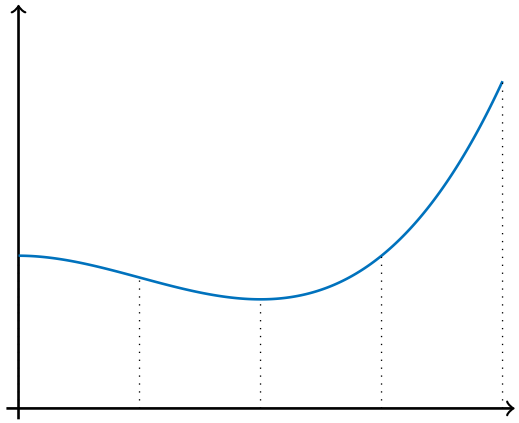


?

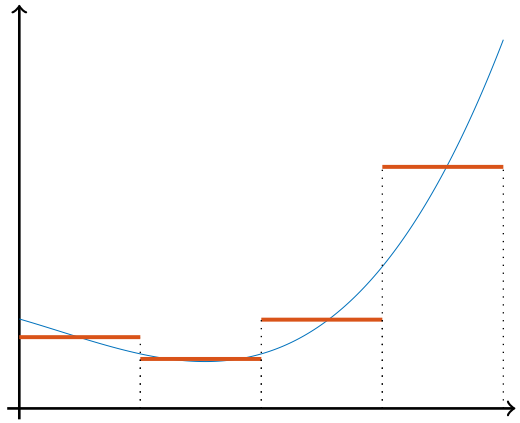
Гамильтониан $\mathcal{H}_q$



Гамильтониан $\mathcal{H}_{q_\ell}$



Усредненный $\mathcal{H}_q$



Релятивистская модель Кронига-Пенни

Пусть q – мера на $\mathbb{R}_+$ с носителем в $\ell\mathbb{Z}_+$ для некоторого $\ell > 0$,

$$q = \sum_{k \geqslant 0} q_k \delta_{\ell k}.$$

Можно задать самосопряжённый оператор Дирака $\mathcal{D}_q \colon X \mapsto Y$, где

$$JX'(x) + QX(x) = Y(x), \qquad x \geqslant 0,$$

и аналогичным образом свести его к канонической системе.

Решение уравнения $JN_q'(x) + Q(x)N_q(x) = 0$ удовлетворяет

$$N_q(x) = e^{JQ(\{x\})} N_q(x-).$$

Для произвольного $x \geqslant 0$ имеем

$$N_q(x) = e^{JQ_n} e^{JQ_{n-1}} \cdot \ldots \cdot e^{JQ_0}, \quad n = \lfloor x/\ell \rfloor.$$

Решение спектральной задачи для модели Кронига-Пенни

Теорема (Р. Бессонов, П. Г., 2025)

Для $q = \sum_{k \geqslant 0} q_k \delta_{\ell k}$ *имеем* $q_0 = \varkappa(f_q(\infty))$, *где* $f_q(\infty) = \lim\limits_{y \to \infty} f_q(iy)$ *и биекция* $\varkappa\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *задана явной формулой*

$$\varkappa(w) = \frac{\overline{w}}{2|w|} \log \frac{1+|w|}{1-|w|}, \qquad \varkappa^{-1}(z) = \frac{\overline{z}}{|z|} \tanh |z|.$$

Решение спектральной задачи для модели Кронига-Пенни

Теорема (Р. Бессонов, П. Г., 2025)

Для $q = \sum_{k\geqslant 0} q_k \delta_{\ell k}$ *имеем* $q_0 = \varkappa(f_q(\infty))$, *где* $f_q(\infty) = \lim\limits_{y\to\infty} f_q(iy)$ *и биекция* $\varkappa\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *задана явной формулой*

$$\varkappa(w) = \frac{\overline{w}}{2|w|} \log \frac{1+|w|}{1-|w|}, \qquad \varkappa^{-1}(z) = \frac{\overline{z}}{|z|} \tanh |z|.$$

Теорема (Р. Бессонов, П. Г., 2025)

Функции Шура f_q *и* f_{q_ℓ} *для* $q = \sum_{k\geqslant 0} q_k \delta_{\ell k}$ *и* $q_\ell = \sum_{k\geqslant 0} q_{k+1} \delta_{\ell k}$ *связаны формулой*

$$e^{2i\ell z} f_{q_\ell}(z) = \frac{f_q(z) - f_q(\infty)}{1 - \overline{f_q(\infty)} f_q(z)}, \qquad z \in \mathbb{C}_+.$$

Функции Вейля кусочно-постоянных гамильтонианов

$$N_q(x) = e^{JQ_n} e^{JQ_{n-1}} \cdot \ldots \cdot e^{JQ_0}, \qquad \mathcal{H}_q = N_q^* N_q,$$

$$JM_q' = z\mathcal{H}_q M_q, \qquad m_{\mathcal{H}}(z) = \lim_{x \to +\infty} \frac{M_{22}(x,z)}{M_{21}(x,z)}.$$

Функции Вейля кусочно-постоянных гамильтонианов

$$N_q(x) = e^{JQ_n} e^{JQ_{n-1}} \cdot \ldots \cdot e^{JQ_0}, \qquad \mathcal{H}_q = N_q^* N_q,$$

$$JM_q' = z\mathcal{H}_q M_q, \qquad m_{\mathcal{H}}(z) = \lim_{x\to+\infty} \frac{M_{22}(x,z)}{M_{21}(x,z)}.$$

Лемма

Функция Вейля $\mathcal{H}_q$ является π/ℓ-периодической, $m(z+\pi/\ell) = m(z)$.

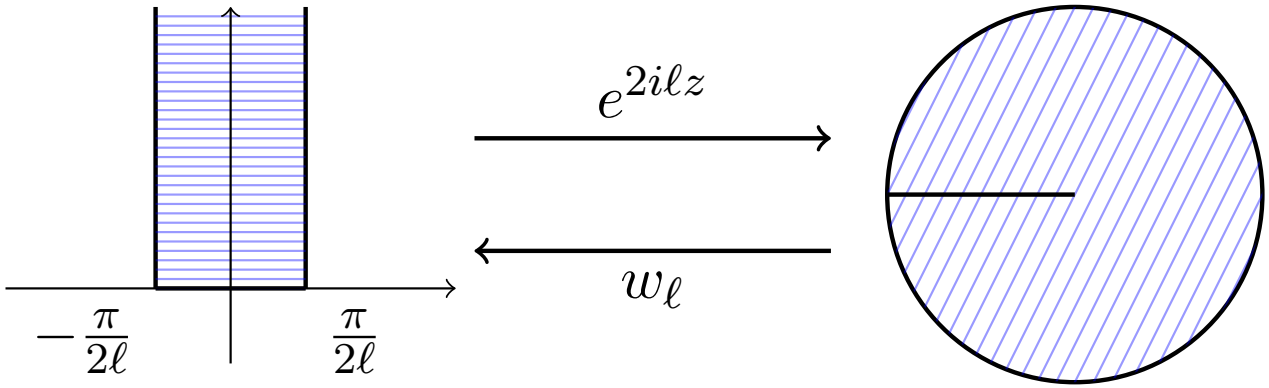
Доказательство.

$$M_k(z) = M(k\ell, (k+1)\ell) = \sqrt{\mathcal{H}(\ell k)}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \ell z & \sin \ell z \\ -\sin \ell z & \cos \ell z \end{pmatrix} \sqrt{\mathcal{H}(\ell k)},$$

$$M_q(\ell n, z) = M_{n-1}(z) M_{n-2}(z) \cdots M_0(z).$$

□

Периодические функции Шура



Пусть $f\colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{D}$ удовлетворяет $f(z+\pi/l) = f(z)$. Рассмотрим

$$F(z) = f(w_\ell(z))\colon \Omega_{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}.$$

Функция F продолжается до аналитической функции во всем круге $\mathbb{D}$.

$$F(e^{2i\ell z}) = f(z), \qquad z \in \mathbb{C}_+,$$
$$F(0) = f(\infty) = \lim_{y\to\infty} f(iy).$$

Алгоритм Шура

Для $F_q(e^{2i\ell z}) = f_q(z)$ и $F_{q_\ell}(e^{2i\ell z}) = f_{q_\ell}(z)$ имеем

$$e^{2i\ell z} f_{q_\ell}(z) = \frac{f_q(z) - f_q(\infty)}{1 - \overline{f_q(\infty)} f_q(z)}, \qquad zF_{q_\ell}(z) = \frac{F_q(z) - F_q(0)}{1 - \overline{F_q(0)} F_q(z)}.$$

Классический алгоритм Шура в $\mathbb{D}$ строит последовательности $F_0, F_1, \ldots$ по правилу

$$F_0 = F, \qquad zF_{k+1} = \frac{F_k - F_k(0)}{1 - \overline{F_k(0)} F_k}, \qquad k \geqslant 0.$$

Последовательность $\{F_n(0)\}_{n\geqslant 0}$ называется коэффициентами Шура функции F.

Теорема (Верблунский)

Отображение $F \mapsto \{F_n(0)\}_{n\geqslant 0}$ задаёт биекцию множества функций Шура и множества бесконечных последовательностей $\mathbb{D}^{\times\infty}$.

Литература

[1] Bessonov, R., Gubkin, P. (2025). Direct and inverse spectral continuity for Dirac operators. arXiv preprint arXiv:2505.00485.

[2] Zeng, J. (2023). Spectral theory of Dirac operators with measures. PhD thesis, University of Oklahoma, Norman.

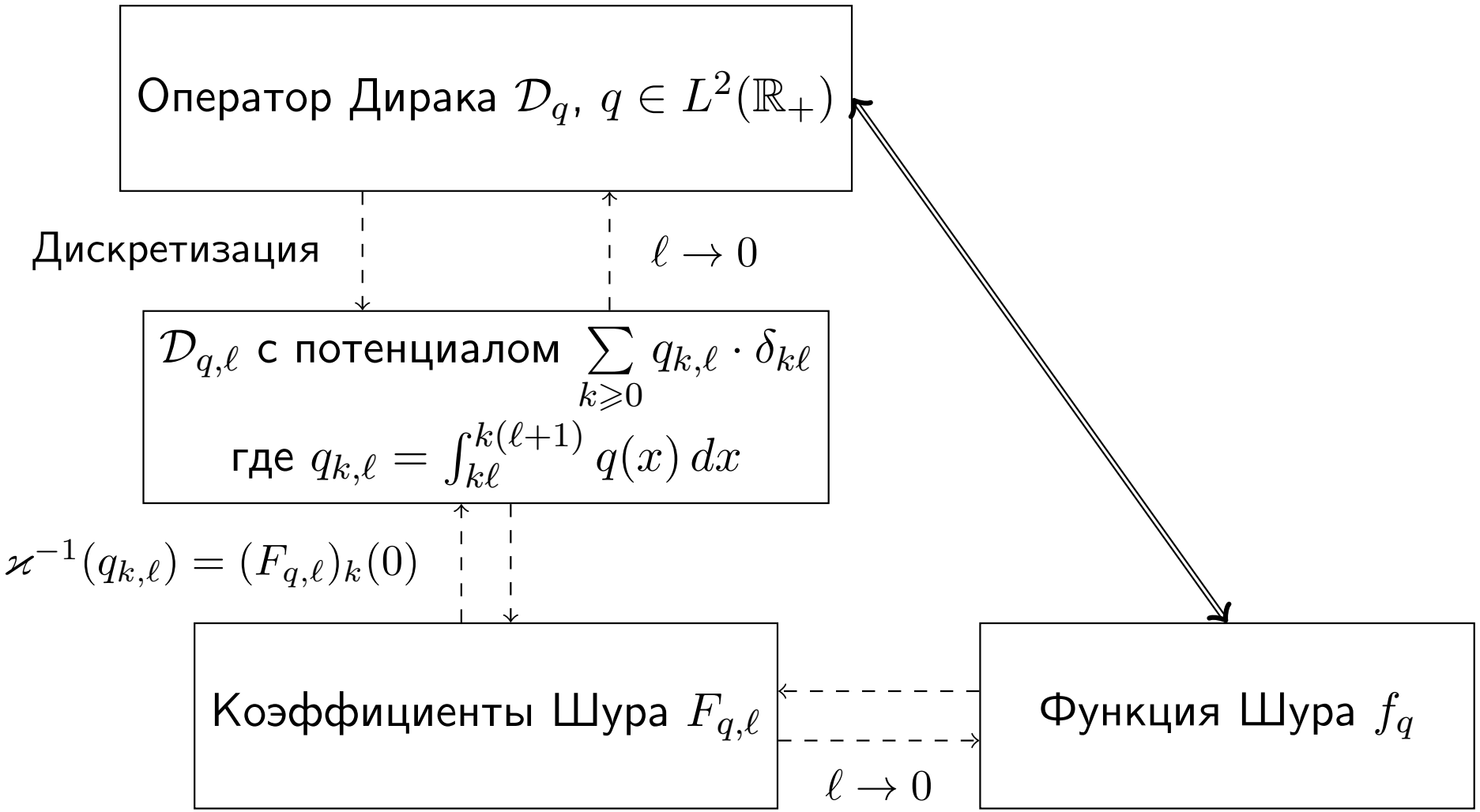



Схема дискретизации для L^2 потенциала