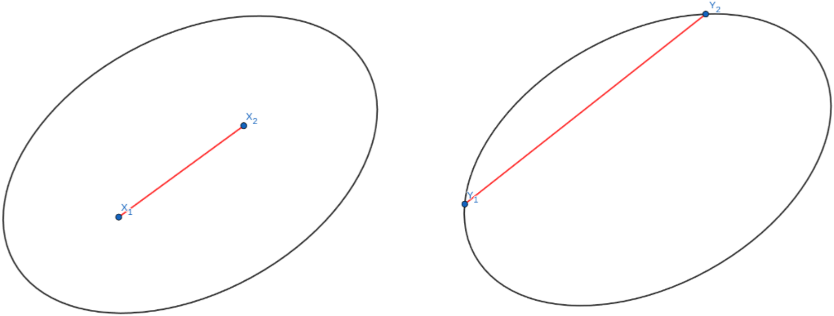
Средние расстояния между случайными точками внутри и на границе выпуклого тела

А. Лотников

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А.Стеклова РАН

Научный руководитель: Д. Запорожец

Постановка проблемы



Распределения точек

- B_1, B_2 — равномерно распределены на границе ∂K (согласно мере Лебега границы P_{out})
- I_1, I_2 — равномерно распределены внутри K (согласно мере Лебега внутренности P_{in})

Рассмотрим непустой выпуклый компакт K в R^n:

Основные определения

- Среднее расстояние между двумя граничными точками:

$$\theta(K) = \mathbb{E}|B_1 B_2|$$

- Среднее расстояние между двумя внутренними точками:

$$\triangle(K) = \mathbb{E}|I_1 I_2|$$

- Моменты расстояний ($p \in \mathbb{N}$):

$$\theta^p(K) = \mathbb{E}|B_1 B_2|^p, \quad \triangle^p(K) = \mathbb{E}|I_1 I_2|^p$$

Основные вопросы

Гипотеза (Запорожец, Тарасов 2019)

$$\forall K \quad \theta(K) \geq \triangle(K)$$

Связанные гипотезы

1. Моменты:
$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \theta^p(K) \geq \triangle^p(K)$$
2. Функции распределения:
$$\forall t > 0 \quad \mathbb{P}(|X_1 X_2| \geq t) \geq \mathbb{P}(|Y_1 Y_2| \geq t)$$

Основная трудность

Фундаментальная разность между:

- Мера Лебега границы.
- Мера Лебега внутренности.

Ключевые известные результаты

Боннет, Гусакова, Тале, Запорожец (2021)

Среднее расстояние между внутренними точками:

$$\frac{7}{60} < \frac{\triangle(K)}{P(K)} < \frac{1}{6}$$

Границы строгие, но асимптотически точные.

Токмачев (2022)

Для плоских выпуклых тел, отношение среднего расстояния между двумя граничными точками и периметра фигуры максимально для круга:

$$\frac{\theta(K)}{P(K)} \leq \frac{2}{\pi^2}$$

Равенство выполняется *только* для круга.

Ключевые известные результаты

Кингман (1969)

Соотношение моментов расстояния между случайными граничными точками и моментами дины случайной хорды.

$$J_k = \frac{n\kappa_n}{(n+k)(n+k+1)} I_{k+n+1}$$

где $J_k = \mathbb{E}|l_1 l_2|^k$, $I_m = \mathbb{E}|\text{хорда}|^m$.

Мосеева (2019)

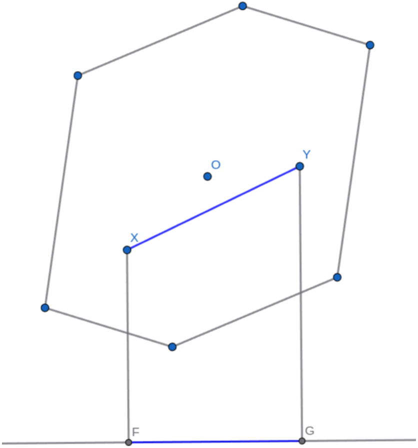
$$F_K^{(\rho)}(x) = \frac{1}{\|K\|}\left(\frac{\omega_n}{n}\cdot x^n - \frac{|K|}{\|K\|}\frac{\kappa_{n-1}}{n+1}\cdot x^{n+1} + \frac{|K|}{\|K\|}\frac{\kappa_{n-1}}{n}\int_0^x (x^n - t^n)F_K(t)dt\right).$$

где $F_K^{(\rho)}(x)$ - функция распределения случайного отрезка, и $F_K(x)$ - функция распределения случайной хорды.

План на сегодня

1. Доказать гипотезу для центрально-симметричных плоских тел.
2. Показать верность гипотезы для моментов высокого порядка в случае плоских тел.
3. Вывести точные соотношения в случае центрально симметричных описанных многоугольников.

Центрально-симметричные тела



Формула Крофтона

Как все вы знаете

$$|XY|^n \propto \int_0^\pi |P_u(XY)|^n du$$

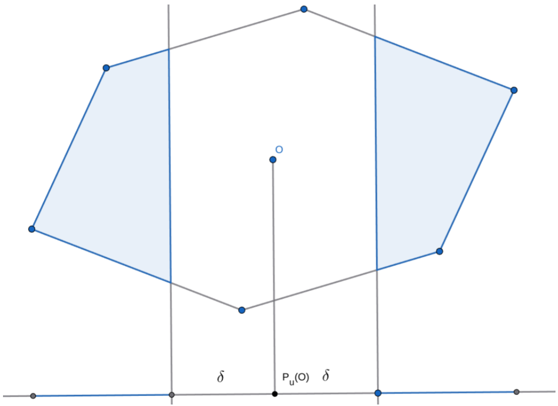
По теореме Фубини

$$\mathbb{E}|XY|^n \propto \int_0^\pi \mathbb{E}|P_u(XY)|^n du$$

Следовательно, достаточно показать, что для любого u

$$\mathbb{E}|P_u(BB')|^n \geq \mathbb{E}|P_u(II')|^n$$

Стохастическая мажоризация



Теорема (Л. 2025)

Для любого центрально симметричного выпуклого тела K и любого направления u.

$$|P_u(OB)| \succ |P_u(OI)|$$

Следствия

Следствие 1 (Л.2025)

Для любого $n \geq 0 \quad \mathbb{E}|OB|^n > \mathbb{E}|OI|^n$

Следствие 2 (Л.2025)

Для любой возрастающей выпуклой функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}f(|BB'|) \geq \mathbb{E}f(|BI|) \geq \mathbb{E}f(|II'|)$$

Следствие 3 (Л.2025)

Для любого $n \geq 1 \quad \mathbb{E}|BB'|^n \geq \mathbb{E}|BI|^n \geq \mathbb{E}|II'|^n$

Случай больших моментов

Основная формула

Теорема (Т.Мосеева 2022)

Пусть K — выпуклое тело в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей, $h(x_0,\dots,x_l)$ — непрерывная функция, $l \le d$. Тогда для всех $k \in \{0,\dots,l+1\}$ имеем

$$\int_{(\partial K)^k} \int_{K^{l-k+1}} h(x_0,\dots,x_l)\, dx_0 \dots dx_{l-k}\, \sigma(dx_{l-k+1}) \dots \sigma(dx_l)$$

$$= (l!)^{d-l} b_{d,l} \int_{A_{d,l}} \int_{(E\cap\partial K)^k} \int_{(E\cap K)^{l-k+1}} h(x_0,\dots,x_l)\, [x_0,\dots,x_l]^{d-l}$$

$$\times \prod_{j=l-k+1}^{l} \|P_E(n_K(x_j))\|^{-1} \lambda_E(dx_0) \dots \lambda_E(dx_{l-k})\, \sigma_{E\cap\partial K}(dx_{l-k+1}) \dots \sigma_{E\cap\partial K}(dx_l)\, \mu_{d,l}(dE).$$

Где $b_{d,l} = \frac{\omega_{d-l+1}\cdots\omega_d}{\omega_1\cdots\omega_l}, \omega_k := |\mathbb{S}^{k-1}|$, а $n_K(x)$ обозначает внешнюю нормаль к K в точке x, а P_E есть ортогональная проекция на плоскость E.

Оценки

$$|E\cap K| \le \frac{|\sigma K|}{2}, \quad \|P_E(n_K(x_j))\|^{-1} \ge 1$$

Результаты

Условие 1

Если:

$$\frac{|K|}{|\sigma K|^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2(n+2)(n+3)}}$$

То: $\mathbb{E}_K|II'|^n \leq \mathbb{E}_K|BB'|^n$

Условие 2

Если:

$$\frac{|K|}{|\sigma K|^2} \geq \frac{1}{2(n+2)}$$

То: $\mathbb{E}_K|IB|^n \leq \mathbb{E}_K|BB'|^n$

Условие 3

Если:

$$\frac{|K|}{|\sigma K|^2} \geq \frac{1}{4(n+3)}$$

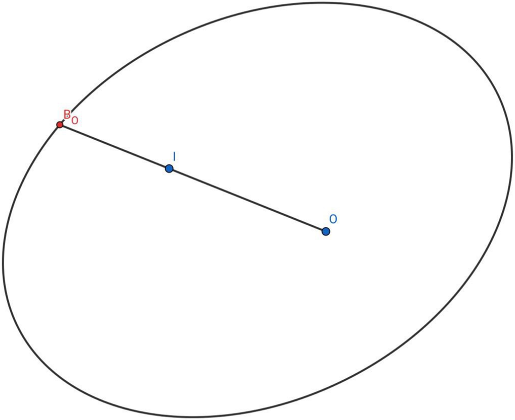
То: $\mathbb{E}_K|II'|^n \leq \mathbb{E}_K|IB|^n$

Описанные многоугольники

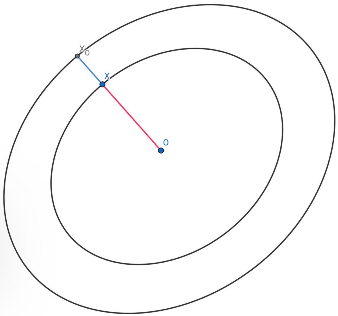
Базовые определения

Определение

Проективное распределение это распределение проекции точки $I \sim P_{in}$ на границу фигуры из фиксированного центра.



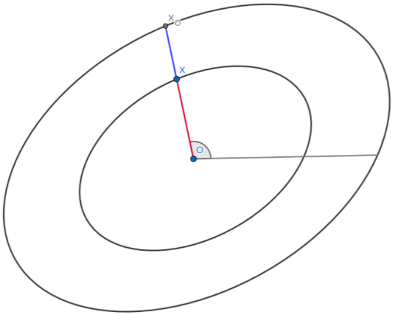
Гомотетичные координаты: определение



Функционал Минковского

Для любого векторного пространства X и его подмножества K, функционал Минковского
$\mu_K : X \to [0, \infty)$ определено как:
$\mu_K(x) = \inf \{r > 0 : x \in rK\}$.

Гомотетичные координаты: определение



Определение координат

Для выпуклой фигуры K, её внутренней точки O и луча OT, определим гомотетичные координаты точки $X \in K$ как :

- $\alpha(X) \in [0, 1]$ — функционал Минковского точки X относительно множества K и центром в точке O
- $t(X) \in S_{n-1}$ — направление вектора из O до X

Гомотетичные координаты: свойства

Теорема (Распределение координат, Л.2025)

Для точка I, равномерно распределенной внутри K:

- $\alpha(I)$ *и* $t(I)$ *независимы*
- *Плотность* $\alpha(I)$*:* $p_\alpha(x) = n \cdot x^{n-1} \cdot 1_{[0,1]}(x)$
- $t(I)$ *имеет распределение пропорциональное площади сегмента.*

Проекция на границу

Точка B_O — проекция точки I из точки O на ∂K:

$$B_O \stackrel{d}{=} (1, t(I))$$

Основной результат

Теорема (Аналог формулы Кингмана и Мосеевой, L.2025)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ - выпуклое тело, и пусть $O \in K$ - некая фиксированная внутренняя точка. Тогда:

1. *Для любого $p \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{E}|II'|^p = \frac{2n}{p+2n} \cdot \mathbb{E}|IB_O|^p$$

2. *Характеристическая функция:*

$$\mathbb{E}\exp(it \cdot |IB_O|) = \frac{\frac{d}{dt}\left[t^{2n} \cdot \mathbb{E}\exp(it \cdot |II'|)\right]}{2n \cdot t^{2n-1}}$$

3. *Расстояния до центра:*

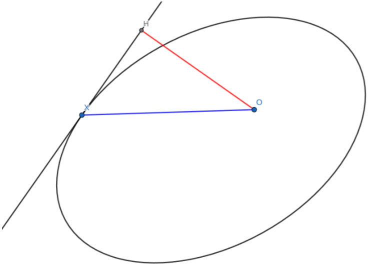
$$\mathbb{E}|OI|^p = \frac{n}{p+n} \cdot \mathbb{E}|OB_O|^p$$

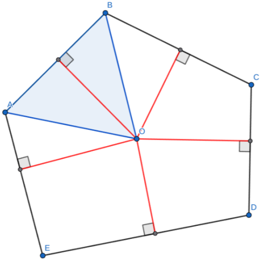
$$\mathbb{E}\exp(it \cdot |OB_O|) = \frac{\frac{d}{dt}\left[t^{n} \cdot \mathbb{E}\exp(it \cdot |IO|)\right]}{n \cdot t^{n-1}}$$

Обозначения

I, I' - независимые случайные точки внутри K, B_O - проекция точки I' на ∂K из

Проективное распределение B_O





Устройство распределения

- **Для выпуклых многогранников:**
  - Сконцентрирована на $(n-1)$-мерных гранях
  - Равномерно на каждой грани
  - Мера каждой грани пропорциональна объему пирамиды с вершиной в точке O и основанием на грани.
- **Особый случай:**

$$B_O \stackrel{d}{=} B \Leftrightarrow \exists \text{ вписанная сфера с центром } O$$

Следствия

Следствие 1 (L.2025)

Пусть K - описанных многогранник. O - центр вписаной сферы. Тогда:

1. Характеристическая функция:
$$\mathbb{E}\exp(it\cdot|IB|) = \frac{\frac{d}{dt}\left[t^{2n}\cdot\mathbb{E}\exp(it\cdot|II'|)\right]}{2n\cdot t^{2n-1}}$$
2. Для любого $p\in\mathbb{N}$:
$$\mathbb{E}|II'|^p = \frac{2n}{p+2n}\cdot\mathbb{E}|IB|^p$$
3. Расстояния до центра:
$$\mathbb{E}|OI|^p = \frac{n}{p+n}\cdot\mathbb{E}|OB|^p$$

Следствие 2 (L.2025)

Распределение $|IB_O|$ не зависит от выбора точки O.

Применение

Применения к проблеме

Главная гипотеза заключается в цепочке неравенств:

$$\mathbb{E}|II'|^p \leq \mathbb{E}|IB|^p \leq \mathbb{E}|BB'|^p$$

Вторая часть цепочки (Л. 2025 основано на работе Токмачева 2021)

1. Пусть K - выпуклый многоугольник, и O - некоторая его внутренняя точка Тогда:

$$\mathbb{E}|IB_O|^2 = \frac{3}{2} \cdot \mathbb{E}|OB_O|^2 - \frac{4}{3} \cdot |O\mathbb{E}B_O|^2$$

$$\mathbb{E}|B_O B_O'|^2 = 2 \cdot \mathbb{E}|OB_O|^2 - 2 \cdot |O\mathbb{E}B_O|^2$$

Применения

Следствие 1

1. Если O - центр масс границы, тогда: $\mathbb{E}|IB_O|^2 = \frac{3}{2} \cdot \mathbb{E}|OB_O|^2 = \frac{3}{4} \cdot \mathbb{E}|B_O B'_O|^2$
2. Если O - центр масс границы: $\mathbb{E}|II'|^2 = \mathbb{E}|OB_O|^2$
3. $\mathbb{E}|II'|^2 < \mathbb{E}|B_O B'_O|^2 \iff \frac{10}{9} \cdot |O\mathbb{E}B_O|^2 < \mathbb{E}|OB_O|^2$

Следствие 2

Для симметричных многоугольников $\mathbb{E}|II'|^2 = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E}|IB_0|^2 = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}|B_O B'_O|^2$

Следствие 3

Для правильных $2n$-угольников $\mathbb{E}|II'|^2 = \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E}|IB|^2 = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}|BB'|^2$

Литература

1. G. Bonnet, A. Gusakova, C. Thäle, D. Zaporozhets. *Sharp inequalities for the mean distance of random points in convex bodies*. Advances in Mathematics 386 (2021) 107813.
2. A. S. Tokmachev. *Mean distance between random points on the boundary of a convex figure*. Zap. Nauchn. Sem. POMI, 2022, vol. 510, 248–261.
3. J. Kingman. *Random secants of a convex body*. J. Appl. Probab., 6 No. 3 (1969), 660–672.
4. T. Moseeva. *Random sections of convex bodies*. Probability and Statistics. 28, Zap. Nauchn. Sem. POMI, 486, POMI, St. Petersburg, 2019, 190–199.
5. *Lecture Notes in Mathematics, Stochastic Geometry: Modern Research Frontiers* 1617-9692.
6. Schneider, R., Weil, W. Stochastic and Integral Geometry. Springer, 2008.

Спасибо за внимание!