Рассеяние и излучение акустических волн в дискретных волноводах с несколькими цилиндрическими выходами на бесконечность

Сморчков Данил
СПбГУ

Доклад основан на результатах, полученных совместно с
А.С. Порецким

9-ая Санкт-Петербургская зимняя молодежная конференция по теории вероятностей и математической физике

20 ноября, 2025

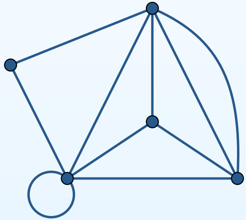
Постановка задачи

Граф

Графом G назовем пару множеств (V, E), где V – множество вершин, а E – множество ребер (неупорядоченные пары вершин).

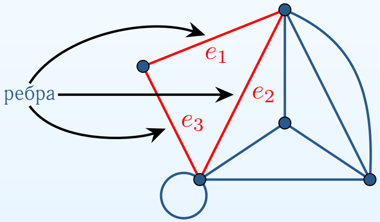
Граф

Графом G назовем пару множеств (V, E), где V – множество вершин, а E – множество ребер (неупорядоченные пары вершин).



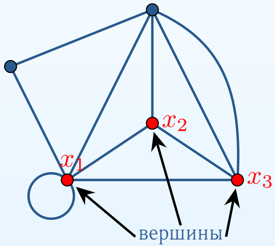
Граф

Графом G назовем пару множеств (V, E), где V – множество вершин, а E – множество ребер (неупорядоченные пары вершин).



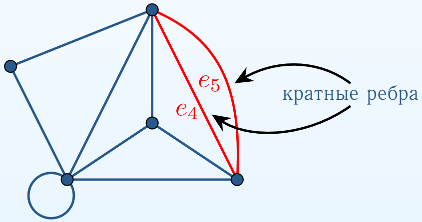
Граф

Графом G назовем пару множеств (V, E), где V – множество вершин, а E – множество ребер (неупорядоченные пары вершин).



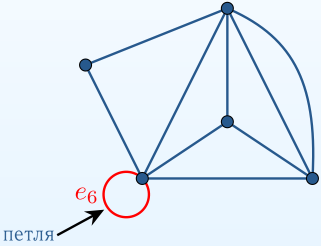
Граф

Графом G назовем пару множеств (V, E), где V – множество вершин, а E – множество ребер (неупорядоченные пары вершин).



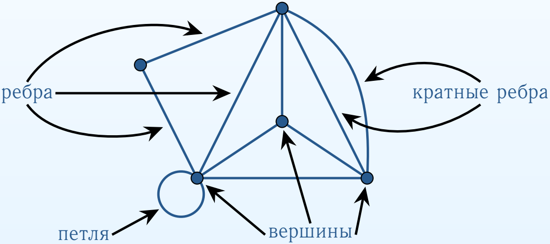
Граф

Графом G назовем пару множеств (V, E), где V – множество вершин, а E – множество ребер (неупорядоченные пары вершин).



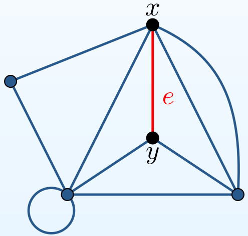
Граф

Графом G назовем пару множеств (V, E), где V – множество вершин, а E – множество ребер (неупорядоченные пары вершин).



Граф

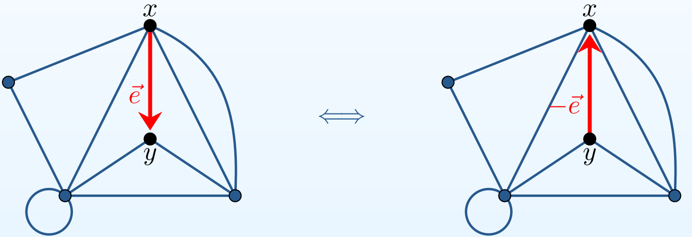
Графом G назовем пару множеств (V, E), где V – множество вершин, а E – множество ребер (неупорядоченные пары вершин).



Если x – конец ребра e, то x и e называются инцидентными, и при этом пишется $x|e = e|x$.

Граф

Графом G назовем пару множеств (V, E), где V – множество вершин, а E – множество ребер (неупорядоченные пары вершин).



Если x – конец ребра e, то x и e называются инцидентными, и при этом пишется $x|e = e|x$. Стрелка $\vec{e}$ выходит из вершины x и входит в y; при этом пишется $x|\vec{e}$ и $\vec{e}|y$, что то же самое $(-\vec{e})|x$ и $y|(-\vec{e})$.

Разностный оператор акустики

Функция u принадлежит классу $\ell_2(V)$, если

$$u : V \to \mathbb{C} \quad \text{и} \quad ||u||^2 := \sum_{x \in V} |u(x)|^2 < \infty.$$

Разностный оператор акустики

Функция u принадлежит классу $\ell_2(V)$, если

$$u : V \to \mathbb{C} \quad \text{и} \quad ||u||^2 := \sum_{x \in V} |u(x)|^2 < \infty.$$

Мы будем рассматривать оператор следующего вида

$$(Au)(x) := \sum_{e \in E : e | x} a(e)(u(x) - u(x+e)),$$

$$A := -\mathrm{div} a \nabla,$$

где функция $a : E \to \mathbb{C}$ ограничена.

Разностный оператор акустики

Функция u принадлежит классу $\ell_2(V)$, если

$$u : V \to \mathbb{C} \quad \text{и} \quad ||u||^2 := \sum_{x \in V} |u(x)|^2 < \infty.$$

Мы будем рассматривать оператор следующего вида

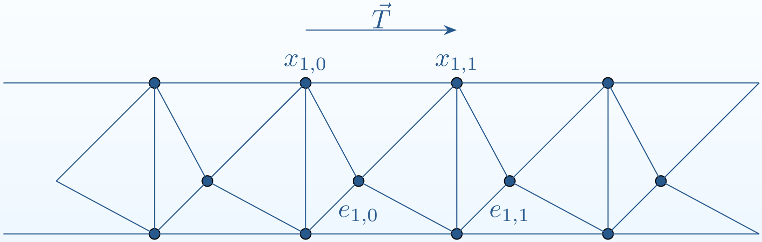
$$(Au)(x) := \sum_{e \in E : e | x} a(e)(u(x) - u(x+e)),$$

$$A := -\mathrm{div} a \nabla,$$

где функция $a : E \to \mathbb{C}$ ограничена.

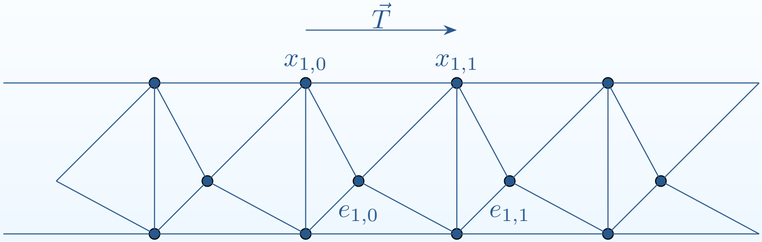
Pr. *Оператор A действует из $\ell_2(V)$ в $\ell_2(V)$, линеен и ограничен. Если функция a вещественна, то он самосопряжен.*

Цилиндр и фундаментальный граф



Здесь $x_{1,1} = x_{1,0} + \vec{T}$, $e_{1,1} = e_{1,0} + \vec{T}$.

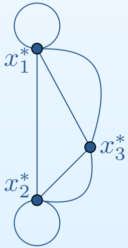
Цилиндр и фундаментальный граф



Здесь $x_{1,1} = x_{1,0} + \vec{T}$, $e_{1,1} = e_{1,0} + \vec{T}$.

Фундаментальный граф

- $x_1 \sim x_2$, если $x_1 = x_2 + n\vec{T}$
- $e_1 \sim e_2$, если $e_1 = e_2 + m\vec{T}$
- $G^* = (V^*, E^*)$, где $V^* = {}^{V}\!/\!_{\sim}$, $E^* = {}^{E}\!/\!_{\sim}$

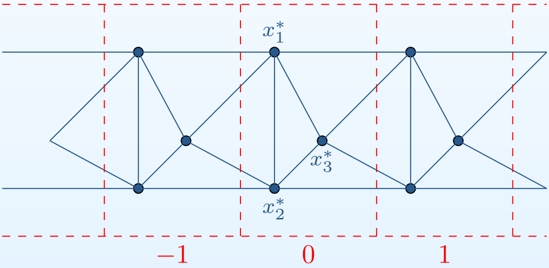


Нумерация и функция индекса ребра

- Выберем по одному представителю каждого класса из V^*; множество таких вершин – V_0.
- Введем $n : V \to \mathbb{Z}$; положим $n(x + m\vec{T}) = m$, $\forall x \in V_0,\ m \in \mathbb{Z}$. n – номер ячейки периодичности.

Нумерация и функция индекса ребра

- Выберем по одному представителю каждого класса из V^*; множество таких вершин – V_0.
- Введем $n : V \to \mathbb{Z}$; положим $n(x + m\vec{T}) = m$, $\forall x \in V_0,\ m \in \mathbb{Z}$. n – номер ячейки периодичности.



$$\Downarrow$$

$$x = (x^*, n),\ n = n(x), \quad u(x) = u(x^*, n)$$

Нумерация и функция индекса ребра

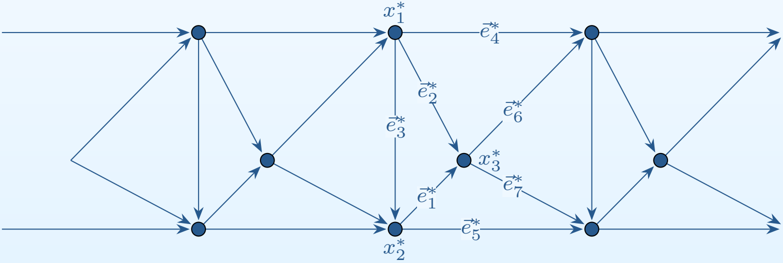
Функция $\tau(\vec{e}) = n(y) - n(x)$, $x|\vec{e}|y$, – индекс ребра.
Она периодична на E, и потому корректно определена на E^*.

Th. *По пара (G^*, τ) восстанавливается единственный цилиндр.*

Нумерация и функция индекса ребра

Функция $\tau(\vec{e}) = n(y) - n(x)$, $x|\vec{e}|y$, – индекс ребра.
Она периодична на E, и потому корректно определена на E^*.

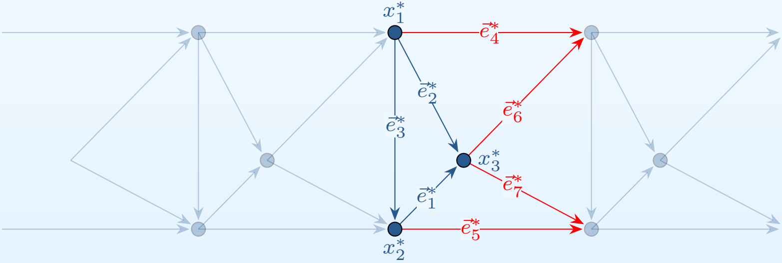
Th. *По пара (G^*, τ) восстанавливается единственный цилиндр.*



Нумерация и функция индекса ребра

Функция $\tau(\vec{e}) = n(y) - n(x)$, $x|\vec{e}|y$, – индекс ребра.
Она периодична на E, и потому корректно определена на E^*.

Th. *По пара (G^*, τ) восстанавливается единственный цилиндр.*



Нумерация и функция индекса ребра

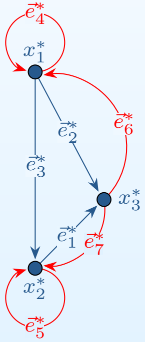
Функция $\tau(\vec{e}) = n(y) - n(x)$, $x|\vec{e}|y$, – индекс ребра.
Она периодична на E, и потому корректно определена на E^*.

Th. *По пара (G^*, τ) восстанавливается единственный цилиндр.*

$\tau(\vec{e}_1^*) = 0$

$\tau(\vec{e}_2^*) = 0$

$\tau(\vec{e}_3^*) = 0$



$\tau(\vec{e}_4^*) = 1$

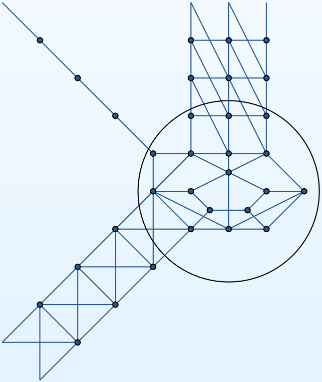
$\tau(\vec{e}_5^*) = 1$

$\tau(\vec{e}_6^*) = 1$

$\tau(\vec{e}_7^*) = 1$

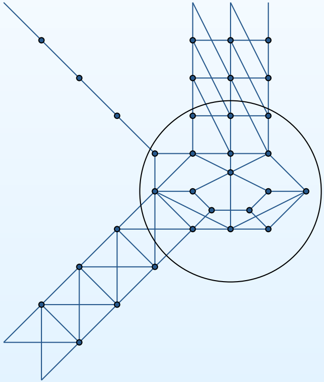
Задача в волноводе

Волновод $G = (V, E)$ – граф, который совпадает вне большого шара с объединением конечного числа попарно не пересекающихся полуцилиндров.



Задача в волноводе

Волновод $G = (V, E)$ – граф, который совпадает вне большого шара с объединением конечного числа попарно не пересекающихся полуцилиндров.



- Уравнение

$$-\mathrm{div} a \nabla u = \mu u + f$$

- Условия стабилизации

$$|a(e_r^*, n_r) - a^r(e_r^*)| = O(e^{-\delta n_r})$$

- Правая часть

$$f(x_r^*, n_r) = O(e^{-\gamma n_r}),\ 0 < \gamma < \delta$$

Литература

Chung F., Spectral graph theory. AMS, 1997.

Спектральные свойства Лапласиана на графе, связь с геометрией, симметрии, задачи Дирихле и Неймана, неравенства Соболева, случайные процессы.

Коротяев Е., Сабурова Н. Спектральные оценки для оператора Шредингера на периодических дискретных графах //Алгебра и анализ. – 2018.

Мы заимствуем язык описания и основные конструкции, но цели разные.

Parra D., Richard S. Spectral and scattering theory for Schrödinger operators on perturbed topological crystals //Reviews in Mathematical Physics. – 2018.

Существование и полнота волновых операторов при слабых ограничениях на скорость стабилизации. Не изучается асимптотика решений и не допускается возмущение геометрии.

План работы

Назаров С. А., Пламеневский Б. А., Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. Наука, Москва, 1991.

Подход

- Модельная задача в цилиндре. Задача на ячейке
- Приходящие и уходящие волны
- Фредгольмовость задачи в волноводе
- Собственные функции непрерывного спектра, матрица рассеяния
- Принцип излучения

Модельная задача

Задача в цилиндре

- Модельная задача в цилиндре

$$-\mathrm{div} a\nabla u(x^*, n) = \mu u(x^*, n).$$

Коэффициенты a не зависят от n (периодичен).

Задача в цилиндре

- Модельная задача в цилиндре

$$-\mathrm{div} a \nabla u(x^*, n) = \mu u(x^*, n).$$

Коэффициенты a не зависят от n (периодичен).

- Ищем решение в виде $u(x^*, n) = e^{in\lambda}\psi(x^*)$. Тогда

$$(Au)(x^*, n) = e^{in\lambda}(A(\lambda)\psi)(x^*) \quad \Rightarrow \quad (A(\lambda)\psi)(x^*) = \mu\psi(x^*).$$

Задача в цилиндре

- Модельная задача в цилиндре

$$-\mathrm{div} a\nabla u(x^*, n) = \mu u(x^*, n).$$

Коэффициенты a не зависят от n (периодичен).

- Ищем решение в виде $u(x^*, n) = e^{in\lambda}\psi(x^*)$. Тогда

$$(Au)(x^*, n) = e^{in\lambda}(A(\lambda)\psi)(x^*) \quad \Rightarrow \quad (A(\lambda)\psi)(x^*) = \mu\psi(x^*).$$

- Матричный оператор с параметром $\lambda \in [0, 2\pi)$:

$$(A(\lambda)\psi)(x^*) = \sum_{\substack{e^*\in E^* \\ e^*|x^*}} a(e^*) \left(\psi(x^*) - e^{i\tau(\vec{e^*})\lambda}\psi(x^* + e^*)\right)$$

Задача в цилиндре

- Модельная задача в цилиндре

$$-\mathrm{div} a \nabla u(x^*, n) = \mu u(x^*, n).$$

  Коэффициенты a не зависят от n (периодичен).

- Ищем решение в виде $u(x^*, n) = e^{in\lambda}\psi(x^*)$. Тогда

$$(Au)(x^*, n) = e^{in\lambda}(A(\lambda)\psi)(x^*) \quad \Rightarrow \quad (A(\lambda)\psi)(x^*) = \mu\psi(x^*).$$

- Матричный оператор с параметром $\lambda \in [0, 2\pi)$:

$$(A(\lambda)\psi)(x^*) = \sum_{\substack{e^* \in E^* \\ e^* | x^*}} a(e^*) \left(\psi(x^*) - e^{i\tau(\vec{e^*})\lambda}\psi(x^* + e^*)\right)$$

$$(Au)(x) = \sum_{\substack{e \in E \\ e | x}} a(e)\Big(u(x) - u(x + e)\Big).$$

Приходящие и уходящие волны

Пусть μ не является вырожденной зоной (flat band) и порогом.
μ – вырожденная зона, если $\det(A(\lambda) - \mu) \equiv 0 \; \forall \lambda$. μ – порог, если существуют присоединенные векторы для $\lambda \mapsto A(\lambda) - \mu$.

Приходящие и уходящие волны

Пусть μ не является вырожденной зоной (flat band) и порогом. μ – вырожденная зона, если $\det(A(\lambda)-\mu)\equiv 0\ \forall\lambda$. μ – порог, если существуют присоединенные векторы для $\lambda\mapsto A(\lambda)-\mu$. Тогда

- Оператор $\lambda\mapsto A(\lambda)-\mu$ имеет конечное число собственных значений λ в вертикальной полосе $[0,2\pi)+i\mathbb{R}$.
- Волнами назовем функции

$$u_k(x^*,n)=\eta(n)C_k e^{i\lambda_k n}\psi_k(x^*),\quad \lambda_k\in\mathbb{R}.$$

Здесь $\eta(n)$ – срезка, $\eta(n)=0$ при $n\leqslant 0$ и $\eta(n)=1$, если $n>0$.

- Приходящие волны u_k^+, уходящие u_j^-:

$$iq(u_j^\pm,u_k^\mp)=0,\quad iq(u_j^\pm,u_k^\pm)=\mp\delta_{jk}.$$

Здесь $j,k=1,\dots,\varkappa$. Величина $iq(u,u)$ имеет смысл потока энергии. Число приходящих и уходящих волн совпадает.

Матрица рассеяния и принцип излучения

Матрица рассеяния и принцип излучения

Th. *$\exists$ решения Y_k^+ однородной задачи с асимптотикой*

$$Y_k^+ = u_k^+ + \sum_{l=1}^{\Upsilon} S_{kl} u_l^- + O(e^{-\gamma n}), \quad k = 1, \ldots, \Upsilon.$$

Здесь $0 < \gamma < \delta$, S – унитарная матрица рассеяния.
Y_k^+ называются собственными функциями н.с.

Матрица рассеяния и принцип излучения

Th. $\exists$ *решения* Y_k^+ *однородной задачи с асимптотикой*

$$Y_k^+ = u_k^+ + \sum_{l=1}^{\Upsilon} S_{kl} u_l^- + O(e^{-\gamma n}), \quad k = 1, \ldots, \Upsilon.$$

Здесь $0 < \gamma < \delta$, S *– унитарная матрица рассеяния.*
Y_k^+ *называются собственными функциями н.с.*

Th. *Пусть* μ *– не собственное число задачи в волноводе. Тогда для любой* $f = O(e^{-\gamma n})$ *существует единственное решение* u *уравнения* $Au = \mu u + f$ *с условиями излучения*

$$u = \sum_k c_k u_k^- + O(e^{-\gamma n}),$$

где коэффициенты c_k *вычисляются по формулам*

$$c_k = i \sum_l S_{lk}(f, Y_l^+).$$

Спасибо за внимание!