Предельные теоремы для класса максимальных ветвящихся процессов

Талпа Г.А. Шкляев А.В.

МГУ имени М. В. Ломоносова

20 ноября 2025 г.

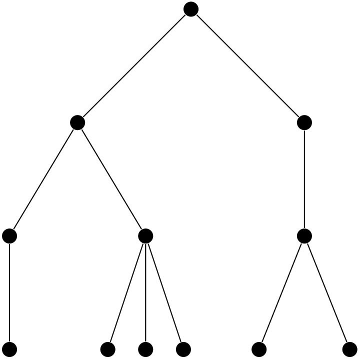
Содержание

Ветвящиеся процессы

- $Z_0 = 1,\ Z_n = \sum\limits_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i}$, где $X_{n,i}$ - н.о.р. с ф.р. $F(x)$.

Ветвящиеся процессы

- $Z_0 = 1,\ Z_n = \sum\limits_{i=1}^{Z_{n-1}} X_{n,i}$, где $X_{n,i}$ - н.о.р. с ф.р. $F(x)$.



$Z_0 = 1$

$Z_1 = 2$

$Z_2 = 3$

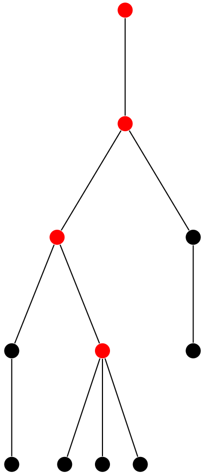
$Z_3 = 6$

Максимальные ветвящиеся процессы(МВП)

- $M_0 = 1,\ M_n = \max(X_{n,1}, \ldots X_{n,M_{n-1}})$.

Максимальные ветвящиеся процессы(МВП)

- $M_0 = 1,\ M_n = \max(X_{n,1}, \ldots X_{n,M_{n-1}})$.



$M_0 = 1$

$M_1 = 2$

$M_2 = 2$

$M_3 = 3$

История вопроса

История вопроса

1. Lamperti, J. 1970. Maximal branching processes and longrange percolation. J. Appl. Probab. 7(1): 89–96.
2. Lamperti, J. 1972. Remarks on maximal branching processes. Theor. Probab. Appl. 17(1): 44–53.

История вопроса

1. Lamperti, J. 1970. Maximal branching processes and longrange percolation. J. Appl. Probab. 7(1): 89–96.
2. Lamperti, J. 1972. Remarks on maximal branching processes. Theor. Probab. Appl. 17(1): 44–53.
3. А. В. Лебедев Максимальные ветвящиеся процессы с неотрицательными значениями // Теория вероятностей и ее применения, 2005. Т. 50. № 3. С. 564–570.
4. А. В. Лебедев, Максимальные ветвящиеся процессы в случайной среде, Информ. и её примен., 2018, том 12, выпуск 2, 35–43

Проблемы

- Производящие функции не подходят для работы с максимумом.

Проблемы

- Производящие функции не подходят для работы с максимумом.
- $\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_k) \leq t) = F^k(t)$

Проблемы

- Производящие функции не подходят для работы с максимумом.
- $\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_k) \le t) = F^k(t)$

$$\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_{M_1}) \le t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_{M_1}) \le t \mid M_1 = n) \cdot \\ \cdot \mathbb{P}(M_1 = n)\Big]$$

Проблемы

- Производящие функции не подходят для работы с максимумом.
- $\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_k) \le t) = F^k(t)$

$$\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_{M_1}) \le t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big[\mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_{M_1}) \le t \mid M_1 = n) \cdot \\ \cdot \mathbb{P}(M_1 = n)\Big]$$

- Функции распределения тоже не подходят.

Другое представление

Другое представление

- Если $R \sim U[0,1]$ и F – некоторая функция распределения, то $F^{-1}(R) \sim F$

Другое представление

- Если $R \sim U[0,1]$ и F – некоторая функция распределения, то $F^{-1}(R) \sim F$

- $\widetilde{M}_0 = 1$, $\widetilde{M}_n = F^{-1}(R_n^{1/\widetilde{M}_{n-1}})$, $R_n \sim \mathrm{U}[0,1]$

Другое представление

- Если $R \sim U[0,1]$ и F – некоторая функция распределения, то $F^{-1}(R) \sim F$
- $\widetilde{M}_0 = 1,\ \widetilde{M}_n = F^{-1}(R_n^{1/\widetilde{M}_{n-1}}),\ R_n \sim \mathrm{U}[0,1]$
- $\mathbb{P}(F^{-1}(R_n^{1/\widetilde{M}_{n-1}}) \leq x \mid \widetilde{M}_{n-1} = k) = F^k(x)$

Другое представление

- Если $R \sim U[0,1]$ и F – некоторая функция распределения, то $F^{-1}(R) \sim F$
- $\widetilde{M}_0 = 1$, $\widetilde{M}_n = F^{-1}(R_n^{1/\widetilde{M}_{n-1}})$, $R_n \sim \mathrm{U}[0,1]$
- $\mathbb{P}(F^{-1}(R_n^{1/\widetilde{M}_{n-1}}) \leq x \mid \widetilde{M}_{n-1} = k) = F^k(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x \mid M_{n-1} = k)$

Другое представление

- Если $R \sim U[0,1]$ и F – некоторая функция распределения, то $F^{-1}(R) \sim F$
- $\widetilde{M}_0 = 1$, $\widetilde{M}_n = F^{-1}(R_n^{1/\widetilde{M}_{n-1}})$, $R_n \sim \mathrm{U}[0,1]$
- $\mathbb{P}(F^{-1}(R_n^{1/\widetilde{M}_{n-1}}) \leq x \mid \widetilde{M}_{n-1} = k) = F^k(x) = \mathbb{P}(M_n \leq x \mid M_{n-1} = k)$

Утверждение 1

Распределения случайных последовательностей M_n и $\widetilde{M}_n$ совпадают.

Рекуррентные случайные последовательности

- $Y_{n+1} = A_{n+1} Y_n + B_{n+1}$, B_{n+1} пренебрежимо мало.

Рассматриваемый вид функций распределения

Рассматриваемый вид функций распределения

Предположение 1

$$F(x) = 1 - \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \; x \to +\infty,$$

где $c > 0$.

Рассматриваемый вид функций распределения

Предположение 1

$$F(x) = 1 - \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \ x \to +\infty,$$

где $c > 0$.

Утверждение 2

Если $F(x)$ такая как в Предположении 1, то $F^{-1}(x) = \frac{c+\varepsilon(x)}{1-x}$, где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to 1 - 0$.

Условие для малости B_n

Предположение 2

Пусть в Утверждении 2 $|\varepsilon(x)| \leq a(1-x)^{\beta}, a > 0, \beta \in (0, 1)$

Утверждение 3

Пусть выполнены Предположения 1, 2, тогда для $\widetilde{M}_n$ справедливо разложение:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n + B_{n+1},$$

Рекуррентное соотношение для $\widetilde{M}$

Утверждение 3

Пусть выполнены Предположения 1, 2, тогда для $\widetilde{M}_n$ справедливо разложение:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n + B_{n+1},$$

где $A_{n+1} = -\frac{c}{\ln R_{n+1}}$ и $\mathbb{E}(|B_{n+1}|^h) < C\mathbb{E}(\widetilde{M}_n^{(1-\beta)h})$, $h \in (0,1)$, $C > 0$.

Сопровождающее блуждание

Для рекуррентной последовательности:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n + B_{n+1},$$

Сопровождающее блуждание

Для рекуррентной последовательности:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n + B_{n+1},$$

Введем шаг $\xi_n = \ln A_n = \ln c - \ln(-\ln R_n)$ и сопровождающее блуждание $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_n$.

Сопровождающее блуждание

Для рекуррентной последовательности:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n + B_{n+1},$$

Введем шаг $\xi_n = \ln A_n = \ln c - \ln(-\ln R_n)$ и сопровождающее блуждание $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_n$. При этом $\mu = \mathbb{E}\xi_n = \ln c + \gamma$, где $\gamma = 0.5772....$. - постоянная Эйлера-Маскерони.

Сопровождающее блуждание

Для рекуррентной последовательности:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n + B_{n+1},$$

Введем шаг $\xi_n = \ln A_n = \ln c - \ln(-\ln R_n)$ и сопровождающее блуждание $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_n$. При этом $\mu = \mathbb{E}\xi_n = \ln c + \gamma$, где $\gamma = 0.5772....$. - постоянная Эйлера-Маскерони.

Классификация МВП:

- $0 < c < e^{-\gamma}$ – процесс докритический
- $c = e^{-\gamma}$ – процесс критический
- $c > e^{-\gamma}$ – процесс надкритический

Содержание

Невырождение

Теорема о невырождении критического МВП

Пусть выполнены Предположения 1, 2, процесс критический($c = e^{-\gamma}$). $\mathbb{P}(X_{n,i} = 0) > 0$.

Невырождение

Теорема о невырождении критического МВП

Пусть выполнены Предположения 1, 2, процесс критический($c = e^{-\gamma}$). $\mathbb{P}(X_{n,i} = 0) > 0$. Тогда:

$$\mathbb{P}(M_n > 0)$$

Невырождение

Теорема о невырождении критического МВП

Пусть выполнены Предположения 1, 2, процесс критический($c = e^{-\gamma}$). $\mathbb{P}(X_{n,i} = 0) > 0$. Тогда:

$$\mathbb{P}(M_n > 0) \sim \frac{I}{\sqrt{n}},$$

Невырождение

Теорема о невырождении критического МВП

Пусть выполнены Предположения 1, 2, процесс критический($c = e^{-\gamma}$). $\mathbb{P}(X_{n,i} = 0) > 0$. Тогда:

$$\mathbb{P}(M_n > 0) \sim \frac{I}{\sqrt{n}},$$

Здесь I – положительная константа.

Содержание

Нормальность

ЦПТ для надкритического МВП

Пусть выполнены Предположения 1, 2, процесс надкритический($c > e^{-\gamma}$).

Нормальность

ЦПТ для надкритического МВП

Пусть выполнены Предположения 1, 2, процесс надкритический($c > e^{-\gamma}$). Тогда:

$$\mathbb{P}(\ln M_n \geq (\ln c + \gamma)n + x\sigma\sqrt{n} \mid M_n > 0) \to 1 - \Phi(x), \quad n \to +\infty.$$

Содержание

Случайная среда

МВПСС впервые встречаются в работе А.В. Лебедева [4].

Случайная среда

МВПСС впервые встречаются в работе А.В. Лебедева [4].

- $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ...)$ - н.о.р посл. сл.в, не зависит от $(R_1, R_2, ...)$.

МВПСС впервые встречаются в работе А.В. Лебедева [4].

- $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ...)$ - н.о.р посл. сл.в, не зависит от $(R_1, R_2, ...)$.
- $a(\eta_n) > 0$ и $c(\eta_n) > 0$.

Случайная среда

МВПСС впервые встречаются в работе А.В. Лебедева [4].

- $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ...)$ - н.о.р посл. сл.в, не зависит от $(R_1, R_2, ...)$.
- $a(\eta_n) > 0$ и $c(\eta_n) > 0$.
- $\ln A_n = \ln c(\eta_n) - \ln(-\ln R_n)$

Содержание

$F(x)$ другого вида

Рассмотрим $F(x) = 1 - \frac{c}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\ x \to +\infty.$

$F(x)$ другого вида

Рассмотрим $F(x) = 1 - \frac{c}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\ x \to +\infty$.
Отсюда:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n^{1/\alpha} + B_{n+1}$$

$F(x)$ другого вида

Рассмотрим $F(x) = 1 - \frac{c}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\ x \to +\infty$.
Отсюда:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n^{1/\alpha} + B_{n+1}$$

Предположим, что $B_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$,

$F(x)$ другого вида

Рассмотрим $F(x) = 1 - \frac{c}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\ x \to +\infty$.
Отсюда:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n^{1/\alpha} + B_{n+1}$$

Предположим, что $B_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\widetilde{M}_n = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\alpha^{n-i}}\right),\ \xi_i = \ln A_i.$$

$F(x)$ другого вида

Рассмотрим $F(x) = 1 - \frac{c}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\ x \to +\infty$.
Отсюда:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n^{1/\alpha} + B_{n+1}$$

Предположим, что $B_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\widetilde{M}_n = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\alpha^{n-i}}\right),\ \xi_i = \ln A_i.$$

- При $\alpha = 1$: $\ln \widetilde{M}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$

$F(x)$ другого вида

Рассмотрим $F(x) = 1 - \frac{c}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\ x \to +\infty$.
Отсюда:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n^{1/\alpha} + B_{n+1}$$

Предположим, что $B_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\widetilde{M}_n = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\alpha^{n-i}}\right),\ \xi_i = \ln A_i.$$

- При $\alpha = 1$: $\ln \widetilde{M}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$
- При $0 < \alpha < 1$: $\ln \widetilde{M}_n \sim \frac{\xi_1}{\alpha^{n-1}}$

$F(x)$ другого вида

Рассмотрим $F(x) = 1 - \frac{c}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right),\ x \to +\infty.$
Отсюда:

$$\widetilde{M}_{n+1} = A_{n+1}\widetilde{M}_n^{1/\alpha} + B_{n+1}$$

Предположим, что $B_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, тогда

$$\widetilde{M}_n = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\alpha^{n-i}}\right),\ \xi_i = \ln A_i.$$

- При $\alpha = 1$: $\ln \widetilde{M}_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$
- При $0 < \alpha < 1$: $\ln \widetilde{M}_n \sim \frac{\xi_1}{\alpha^{n-1}}$
- При $\alpha > 1$: $\ln \widetilde{M}_n \sim \xi_n$

Содержание

Дальнейшие планы

- Получение предельных теорем для случая $\alpha \neq 1$.

Спасибо за внимание!