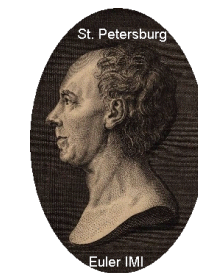
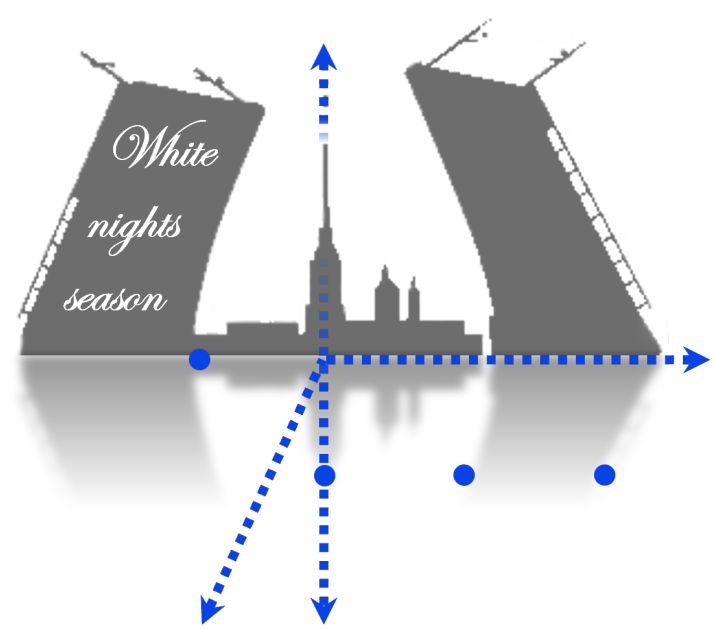


Проективные гиперповерхности высоких степеней, допускающие индуцированное аддитивное действие



Бельдиев Иван Сергеевич

НИУ ВШЭ, Москва

Основные понятия

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики ноль.

Определение 1. Аддитивное действие на алгебраическом многообразии X — это эффективное регулярное действие группы $\mathbb{G}_a^m \cong (\mathbb{K}, +)^m$ на X с открытой орбитой. В случае, когда X — гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$, аддитивное действие на X называется индуцированным, если оно продолжается до регулярного действия на $\mathbb{P}^n$.

Мы будем рассматривать локальные конечномерные алгебры над полем $\mathbb{K}$. Известно, что для конечномерной алгебры A условие локальности эквивалентно условию $A = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — идеал, состоящий из нильпотентных элементов.

Определение 2. Цоколь локальной алгебры A с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ — это идеал $\text{Soc} A = \{a \in A \mid \mathfrak{m}a = 0\}$. A называется горенштейновой, если $\dim \text{Soc} A = 1$.

Определение 3. Пусть проективная гиперповерхность $X \subset \mathbb{P}^n$ задана уравнением $f(z_0, z_1, \dots, z_n) = 0$, где f — однородный многочлен. X называется невырожденной, если не существует линейной замены координат, в результате которой число переменных в многочлене f становится меньше $n + 1$.

Историческая справка

В работе [1] доказана следующая теорема.

Теорема 2. Индуцированные аддитивные действия на невырожденных гиперповерхностях степени d в $\mathbb{P}^{n-1}$ взаимно-однозначно соответствуют H -парам (A, U) , где A — горенштейнова алгебра размерности n с цоколем $\mathfrak{m}^d$ и U — дополнительная к $\text{Soc} A$ гиперплоскость в $\mathfrak{m}$.

Также в работе [1] показано, что если $X \subset \mathbb{P}^n$ — гиперповерхность степени d , допускающая индуцированное аддитивное действие, то $d \leq n$. Кроме того, в работе автора [2] доказано, что для любого d от 2 до n в $\mathbb{P}^n$ существует невырожденная гиперповерхность степени d с индуцированным аддитивным действием.

Основные результаты

Интерес представляет задача классификации невырожденных гиперповерхностей высоких степеней, допускающих индуцированное аддитивное действие. Так, ранее было доказано, что в $\mathbb{P}^n$ существует единственная, с точностью до изоморфизма, такая гиперповерхность степени n .

Основным результатом работы, опубликованном в [3], является следующее утверждение.

Теорема 2. Число классов изоморфизма невырожденных гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$ степени d от $n - 1$ до $n - 3$ указано в следующей таблице.

dn	3	4	5	6	7	8	9	≥ 10
$n - 1$							1	
$n - 2$	–	1					3	
$n - 3$	–	–	1	3	6	5	∞	6

В частности, в $\mathbb{P}^9$ имеется бесконечное семейство попарно неизоморфных гиперповерхностей степени 6, допускающих индуцированное аддитивное действие.

Идеи доказательств

В силу Теоремы 1 каждой невырожденной гиперповерхности в $\mathbb{P}^n$ степени d отвечает горенштейнова алгебра A размерности n такая, что $\text{Soc} A = \mathfrak{m}^d$. Для такой алгебры рассмотрим последовательность вложенных идеалов:

$$A \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{m}^d \supset \mathfrak{m}^{d+1} = 0.$$

Обозначим $r_i = \dim \mathfrak{m}^i - \dim \mathfrak{m}^{i+1} \geq 1$ (в частности, $r_0 = 1$). Последовательность

$$(r_0, r_1, \dots, r_d)$$

называется последовательностью Гильберта-Самюэля алгебры A . Легко видеть, что $n + 1 = \dim A = r_0 + r_1 + \dots + r_d$. Таким образом, задача классификации гиперповерхностей в $\mathbb{P}^n$ степени d с индуцированным аддитивным действием сводится к поиску возможных последовательностей Гильберта-Самюэля, а затем к классификации соответствующих горенштейновых алгебр. Например, если $d = n$, то ясно, что единственная возможная последовательность Гильберта-Самюэля — это $r_0 = r_1 = \dots = r_n = 1$, и не очень сложно доказать, что соответствующая горенштейнова алгебра единственна и изоморфна $\mathbb{K}[x]/(x^{n+1})$.

В случае, когда $d = n - 1$, $n - 2$ или $n - 3$, классификация становится более сложной. А именно, для $d = n - 1$ единственной возможной последовательностью Гильберта-Самюэля является $(1, 2, 1, 1, \dots, 1)$, для $d = n - 2$ — $(1, 3, 1, 1, \dots, 1)$ и $(1, 2, 2, 1, \dots, 1)$, а для $d = n - 3$ — $(1, 4, 1, 1, \dots, 1)$, $(1, 3, 2, 1, \dots, 1)$ и $(1, 2, 2, 2, 1, \dots, 1)$. В статье [4] получена классификация горенштейновых алгебр с такими последовательностями Гильберта-Самюэля, за исключением некоторых малых размерностей. Результаты этой статьи, вместе с дополнительными соображениями, позволяют получить полную классификацию нужных горенштейновых алгебр. Наконец, явно проверяя для каждой из этих алгебр, что соответствующая гиперповерхность однозначно определяется алгеброй и не зависит от выбора подпространства U из Теоремы 1, мы получаем полную классификацию соответствующих проективных гиперповерхностей.

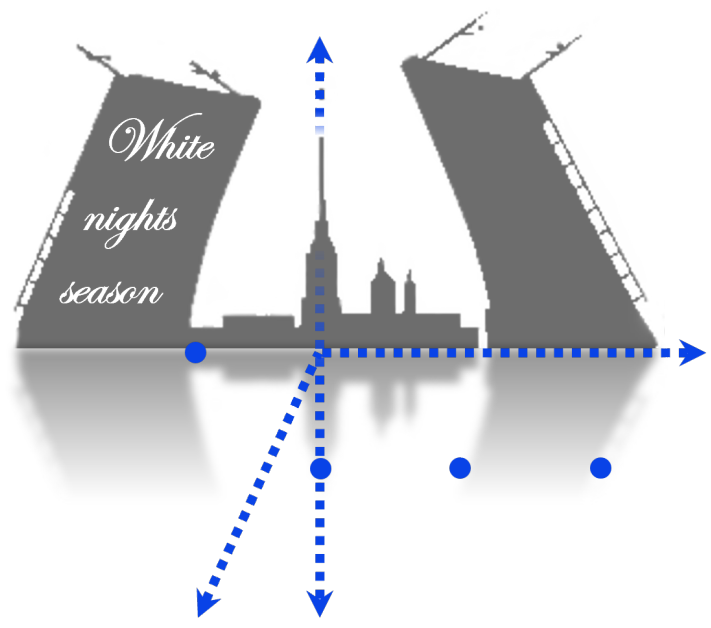
Примеры

Пример 1. Горенштейновы алгебры, отвечающие невырожденным гиперповерхностям в $\mathbb{P}^n$ степеней n и $n - 1$, изоморфны соответственно $\mathbb{K}[x]/(x^{n+1})$ и $\mathbb{K}[x, y]/(xy, y^2 - x^{n-1})$.

Пример 2. В $\mathbb{P}^9$ имеется бесконечное семейство невырожденных гиперповерхностей степени 6 с индуцированным аддитивным действием. Ему отвечает бесконечное семейство горенштейновых алгебр, непрерывно зависящих от параметра и изоморфных $\mathbb{K}[x, y]/(y^2 - x^2y - cx^4, x^3y)$, $c \in \mathbb{K}^*$. Для различных значений c соответствующие алгебры (и, следовательно, гиперповерхности) попарно неизоморфны.

Список литературы

- [1] И. В. Аржанцев, Ю. И. Зайцева, “Эквивариантные пополнения аффинных пространств”, УМН, 77:4(466) (2022), 3–90
- [2] I. Beldiev. Gorenstein algebras and uniqueness of additive actions. Results Math. 78 (2023), no. 5, article 192
- [3] I. Beldiev. Projective hypersurfaces of high degree admitting an induced additive action. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 48 (2025), article 195
- [4] J. Elias and G. Valla. Isomorphism classes of certain Artinian Gorenstein algebras. Algebr. Represent. Theory 14 (2011), no. 3, 429–448



Гибкость триномимальных многообразий

Вилкин Тимофей Владиславович

ФКН НИУ ВШЭ, Москва



Основные понятия

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, $\mathbf{X}$ — аффинное алгебраическое многообразие, $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ — алгебра регулярных функций на $\mathbf{X}$. Обозначим через $\text{SAut}(\mathbf{X})$ подгруппу в группе автоморфизмов многообразия $\mathbf{X}$, порождённую всеми алгебраическими подгруппами, изоморфными аддитивной группе поля $\mathbb{G}_a$.

Определение 1. Многообразие $\mathbf{X}$ называется **жестким**, если оно не допускает нетривиальных $\mathbb{G}_a$ -действий.

Определение 2. Регулярная точка $\mathbf{x} \in \mathbf{X}^{\text{reg}}$ называется **гибкой**, если её касательное пространство порождается касательными векторами к орбитам всех $\mathbb{G}_a$ -действий.

Определение 3. Многообразие $\mathbf{X}$ называется **гибким**, если любая его регулярная точка гибкая.

В работе [1] была доказана следующая теорема:

Теорема 1. [1, Теорема 0.1] Пусть $\mathbf{X}$ неприводимое аффинное алгебраическое многообразие размерности хотя бы 2. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $\mathbf{X}$ гибкое;
- (2) Группа $\text{SAut}(\mathbf{X})$ действует на $\mathbf{X}^{\text{reg}}$ транзитивно;
- (3) Группа $\text{SAut}(\mathbf{X})$ действует на $\mathbf{X}^{\text{reg}}$ бесконечно транзитивно.

Зафиксируем целые числа $\mathbf{n}_0 \geq 0$, $\mathbf{k} \geq 2$, для каждого $\mathbf{i} = 1, \dots, \mathbf{k}$ зафиксируем натуральное число $\mathbf{n}_i > 0$ и кортеж $\mathbf{l}_i = (l_{i1}, \dots, l_{in_i})$. Пусть T_{ij} , $0 \leq i \leq \mathbf{k}$, $1 \leq j \leq \mathbf{n}_i$ — независимые переменные. Определим моном

$$T_i^{\mathbf{l}_i} = T_{i1}^{l_{i1}} T_{i2}^{l_{i2}} \dots T_{in_i}^{l_{in_i}}.$$

Если $\mathbf{n}_0 = 0$, полагаем $T_0^{\mathbf{l}_0} = 1$.

Определение 4. Аффинное алгебраическое многообразие $\mathbf{X}$ называется **триномимальным**, если оно задаётся следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_2 T_0^{\mathbf{l}_0} + T_1^{\mathbf{l}_1} - T_2^{\mathbf{l}_2} = 0, \\ \dots, \\ \lambda_k T_0^{\mathbf{l}_0} + T_1^{\mathbf{l}_1} - T_k^{\mathbf{l}_k} = 0, \end{cases}$$

где для каждого $\mathbf{i} = 2, \dots, \mathbf{k}$: $\lambda_i \in \mathbb{K}^\times = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$, если $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$.

В работе [3] было доказано, что любое триномимальное многообразие неприводимо и нормально.

Введём следующие обозначения:

$$T_i^1 = T_{i1} T_{i2} \dots T_{in_i}, T_i^2 = T_{i1}^2 T_{i2}^2 \dots T_{in_i}^2, \\ \hat{T}_i^{\mathbf{l}_i} = T_{i2}^{l_{i2}} \dots T_{in_i}^{l_{in_i}}, T_i^{2m_i} = T_{i1}^{2m_{i1}} T_{i2}^{2m_{i2}} \dots T_{in_i}^{2m_{in_i}}.$$

Историческая справка

В работе [2] были получены достаточные условия гибкости триномимальной гиперповерхности.

Теорема 2. [2, Теорема 4] Следующие типы триномимальных гиперповерхностей гибкие:

H_1	$\mathbb{V}(T_0^{\mathbf{l}_0} + T_1^{\mathbf{l}_1} + T_2^{\mathbf{l}_2})$
H_2	$\mathbb{V}(T_0^2 + T_1^2 + T_2^2)$
H_3	$\mathbb{V}(T_{01} T_0^{\mathbf{l}_0} + T_1^{\mathbf{l}_1} + T_{21} \hat{T}_2^{\mathbf{l}_2})$
H_4	$\mathbb{V}(T_{01}^2 \hat{T}_0^{2m_0} + T_{11}^2 \hat{T}_1^{2m_1} + T_{21} \hat{T}_2^{\mathbf{l}_2})$
H_5	$\mathbb{V}(T_{01}^2 \hat{T}_0^{2m_0} + T_{11}^2 \hat{T}_1^{2m_1} + T_{21}^2 \hat{T}_2^{2m_2})$

Основные результаты

В работе [4] было получено обобщение результата Сергея Александровича Гайфулина для произвольных триномимальных многообразий.

Введём следующие типы триномимальных многообразий для $\mathbf{k} \geq 3$:

V_1	$\mathbb{V}(\lambda_i T_0^{\mathbf{l}_0} + T_1^{\mathbf{l}_1} - T_i^{\mathbf{l}_i}, 2 \leq i \leq \mathbf{k})$
V_2	$\mathbb{V}(\lambda_i T_0^2 + T_1^{\mathbf{l}_1} + T_i^{\mathbf{l}_i}, 2 \leq i \leq \mathbf{k})$
V_3	$\mathbb{V}(\lambda_i T_{01} T_0^{\mathbf{l}_0} + T_1^{\mathbf{l}_1} - T_{i1} \hat{T}_i^{\mathbf{l}_i}, 2 \leq i \leq \mathbf{k})$
V_4	$\mathbb{V}(\lambda_i T_{01}^2 \hat{T}_0^{2m_0} - T_{11}^2 \hat{T}_1^{2m_1} - T_{i1} \hat{T}_i^{\mathbf{l}_i}, 2 \leq i \leq \mathbf{k})$
V_5	$\mathbb{V}(\lambda_i T_{01}^2 \hat{T}_0^{2m_0} + T_{11}^2 \hat{T}_1^{2m_1} + T_{i1}^2 \hat{T}_i^{2m_i}, 2 \leq i \leq \mathbf{k})$

Теорема 3. Многообразия типа V_1, V_3, V_4 гибкие.

Теорема 4. Пусть многообразие $\mathbf{X}$ типа V_5 или же типа V_2 , но такое, что существуют хотя бы два индекса $i_1, i_2 \in \{2, \dots, \mathbf{k}\}$ такие, что мономы $T_{i_1}^{\mathbf{l}_{i_1}}, T_{i_2}^{\mathbf{l}_{i_2}}$ не содержат переменных в первой степени. Тогда многообразие $\mathbf{X}$ жесткое.

Примеры

Многообразие

$$\mathbf{X} : \begin{cases} T_{01}^2 T_{02}^4 + T_{11}^2 T_{12}^6 - T_{21} T_{22}^2 = 0, \\ 2T_{01}^2 T_{02}^4 + T_{11}^2 T_{12}^6 - T_{31} T_{32}^5 = 0, \end{cases}$$

гибкое, поскольку оно типа V_4 .

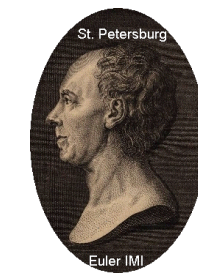
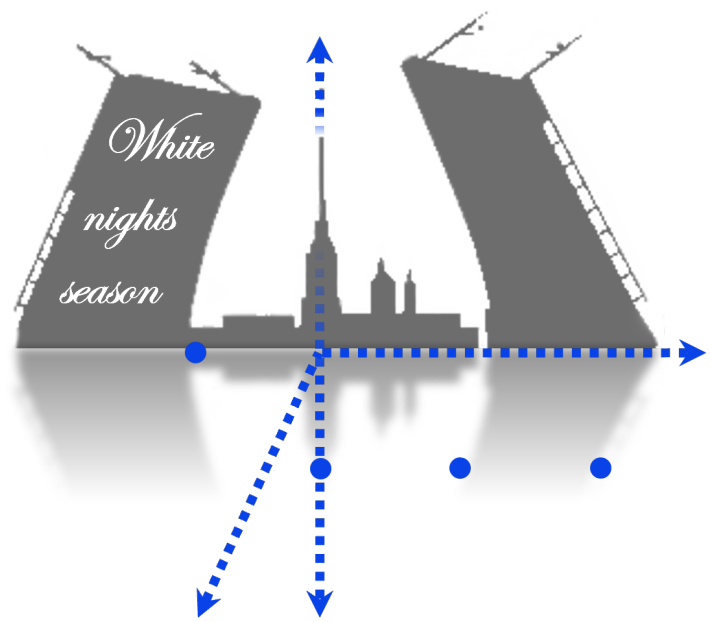
Выводы и дальнейшие направления исследований

Планируется изучить критерий гибкости для триномимальных гиперповерхностей, а следом и для произвольных триномимальных многообразий.

Список литературы

- [1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. 162 (2013) no. 4, 767–823.
- [2] S. Gaifullin. On rigidity of trinomial hypersurfaces and factorial trinomial varieties. Preprint, arxiv: math.AG/1902.06136 (2019).
- [3] J. Hausen, M. Wrobel. Non-complete rational T-varieties of complexity one. Math. Nachr. 290 (2017), no. 5–6, 815–826.
- [4] M. Ignatev, T. Vilkin. On flexibility of trinomial varieties. Preprint, arxiv: math.AG/2506.20524 (2025).

Стабилизаторы однородных локально нильпотентных дифференцирований



Евдокимова Полина Ивановна

МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва

Основные понятия

Доклад основан на совместной работе с Д.А. Чунаевым [1].

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Рассмотрим аффинное многообразие X и его алгебру регулярных функций $B := \mathbb{K}[X]$.

Определение 1. Дифференцирование $\delta: B \rightarrow B$ называется **локально нильпотентным** (ЛНД), если для любого $f \in B$ найдётся натуральное число n такое, что $\delta^n(f) = 0$.

Обозначим множество всех ЛНД алгебры B как $LND(B)$. Существует естественное действие группы автоморфизмов $Aut(B)$ алгебры B на $LND(B)$ сопряжениями. Стабилизатор ЛНД δ при этом действии обозначим через $Aut(B)_\delta$.

Два ЛНД δ и ∂ называются **эквивалентными**, если $Ker(\delta) = Ker(\partial)$, это равносильно тому, что $\partial = h\delta$, для некоторого h из поля частных $Quot(Ker(\delta))$. Для данного ЛНД δ обозначим $\mathcal{U}(\delta)$ — подгруппу экспонент всех эквивалентных с δ ЛНД.

Определение 2. Будем называть ЛНД δ **максимальным**, если все ЛНД алгебры B , коммутирующие с δ , эквивалентны ему.

Определение 3. **Инд-многообразие** — это объединение $V = \cup_{i \in \mathbb{N}} V_i$ возрастающей последовательности алгебраических многообразий $V_1 \hookrightarrow V_2 \hookrightarrow \dots$, причем все вложения $V_i \hookrightarrow V_{i+1}$ замкнуты в топологии Зарисского. Если все V_i аффинны, то V — **аффинное инд-многообразие**. На инд-многообразии вводится топология Зарисского: $U \subseteq V$ замкнуто в V тогда и только тогда, когда $U \cap V_i$ замкнуто в V_i . На замкнутом подмножестве инд-многообразия имеется естественная структура инд-многообразия.

Морфизм двух инд-многообразий $V = \cup_i V_i$ и $W = \cup_i W_i$ — это такое отображение $\varphi: V \rightarrow W$, что для любого k найдётся l , что выполнено следующее: $\varphi(V_k) \subseteq W_l$ и индуцированное отображение $V_k \rightarrow W_l$ — морфизм алгебраических многообразий.

Определение 4. **Инд-группа** G — это инд-многообразие с такой групповой структурой, что отображение $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh^{-1}$, является морфизмом инд-многообразий.

Для группы $Aut(B)$ существует естественная структура инд-группы, а ее алгебра Ли вкладывается в алгебру дифференцирований на B (см. [3]).

Перейдем к определению триномиальных гиперповерхностей. Определим моном $T_i^{l_i} = T_{i1}^{l_{i1}} \dots T_{in_i}^{l_{in_i}}$, $n_0 \geq 0$, $n_1, n_2 \geq 1$, l_{ij} — положительные целые числа, причем если $n_0 = 0$, то соответствующий моном считается равным единице. Обозначим $n = n_0 + n_1 + n_2$.

Определение 5. **Триномиальной гиперповерхностью** называется аффинное многообразие в n -мерном аффинном пространстве, задающееся уравнением следующего вида:

$$T_0^{l_0} + T_1^{l_1} + T_2^{l_2} = 0,$$

где T_{ij} выступают в роли переменных.

Основные результаты

В работе описаны максимальные ЛНД на триномиальных гиперповерхностях, задающихся уравнениями:

$$x_1 \dots x_k y_1^{a_1} \dots y_m^{a_m} = z^n + 1, \quad (1)$$

Утверждение 1. Все однородные ЛНД на триномиальных гиперповерхностях вида (1) максимальны.

Также в работе в комбинаторных терминах описан критерий максимальности однородного ЛНД на нормальном торическом многообразии. Пусть σ — рациональный полиэдральный конус, соответствующий нормальному торическому многообразию с эффективным действием тора T в пространстве $N_{\mathbb{Q}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, где N — решетка однопараметрических подгрупп тора T .

Утверждение 2. Пусть e — корень Демажюра, соответствующий ребру ρ . ЛНД δ_e максимален тогда и только тогда, когда $\langle e, v' \rangle \neq 0$ для всех ребер ρ' , лежащих с ρ в одной двумерной грани σ , где v' — примитивный вектор на ребре ρ' .

Любой $\varphi \in Aut(B)_\delta$ сохраняет подалгебру $A := Ker(\delta)$, поэтому можно рассмотреть гомоморфизм ограничения $\Theta: Aut(B)_\delta \rightarrow Aut(A)$. В [2] доказано следующее утверждение:

Утверждение 3. $Ker(\Theta) = \mathcal{U}(\delta)$.

Аналогично [4] можно доказать следующую теорему:

Теорема 1. Пусть $\mathcal{G} \subseteq Aut(X)$ — замкнутая подгруппа, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли такая, что в ней выполнены следующие условия:

- 1) все ЛНД в $\mathfrak{g}$ эквивалентны и для любого ЛНД $\partial \in \mathfrak{g}$ верно, что $\exp(\partial) \in \mathcal{G}$,
- 2) для любого локально конечного дифференцирования $\delta \in \mathfrak{g}$ верно, что $\delta_s, \delta_n \in \mathfrak{g}$, где $\delta = \delta_s + \delta_n$ — разложение Жордана для δ .

Тогда в $\mathcal{G}$ все максимальные торы сопряжены с помощью $\exp(\partial)$ для некоторого ЛНД $\partial \in \mathfrak{g}$.

Группа $Aut(B)_\delta$ для максимального ЛНД δ удовлетворяет условиям теоремы выше, и поэтому для нее верно следующее:

Следствие. Пусть δ — максимальное ЛНД и T — максимальный тор в $Aut(B)_\delta$. Тогда $Aut(B)_\delta$ сохраняет множество T -полуинвариантных функций из A .

Эти факты позволяют найти $Aut(B)_\delta$ для максимальных ЛНД на описанных выше триномиальных гиперповерхностях, а также на торических многообразиях.

Теорема 2. Пусть δ — однородное неприводимое ЛНД на гиперповерхности вида (1). Тогда

$$Aut(B)_\delta = (S_\delta \ltimes \mathbb{H}_\delta) \ltimes \mathcal{U}(\delta),$$

где S_δ — прямое произведение симметрических групп, переставляющих переменные из ядра, входящие в моном $x_1 \dots x_k y_1^{a_1} \dots y_m^{a_m}$ с одинаковыми степенями, $\mathbb{H}_\delta = \mathbb{H} \cap Aut(B)_\delta$, а $\mathbb{H}$ — некоторый квазитор, действующий на гиперповерхности.

Теорема 3. Пусть X — аффинное торическое многообразие с эффективным действием тора T и δ — максимальное T -однородное ЛНД на X . Тогда

$$Aut(B)_\delta = (S_\delta \ltimes T_\delta) \ltimes \mathcal{U}(\delta),$$

где S_δ — конечная группа, а T_δ — подтор в T , состоящий из коммутирующих с δ элементов.

Список литературы

- [1] D. Chunaev, P. Evdokimova. Isotropy subgroups of homogeneous locally nilpotent derivations, arXiv:2604.04762, 2026.
- [2] N. Dasgupta, S. Gaifullin, A. Lahiri. Isotropy subgroups of locally nilpotent derivations, in preparation.
- [3] J.-P. Furter, H. Kraft. On the geometry of the automorphism groups of affine varieties, arXiv:1809.04175, 2018.
- [4] A. Perepechko, A. Regeta. When is the automorphism group of an affine variety nested? Transform. Groups, 28 (2023), 401-412.

Эквивариантная бирациональная жёсткость проективных пространств

Квитко Ксения Васильевна

НИУ ВШЭ, Москва



Основные понятия

Одним из главных инструментов бирациональной геометрии является программа минимальных моделей (ПММ). Это процедура, получающая на входе проективное алгебраическое многообразие и выдающая в качестве результата либо так называемую «минимальную модель», либо расслоение Мори.

Определение. Пусть X – многообразие с терминальными $\mathbb{Q}$ -факториальными особенностями (например, гладкое). Тогда морфизм $\pi: X \rightarrow Y$ называется **расслоением Мори**, если относительный ранг Пикара $\rho(X/Y) = 1$, антиканонический дивизор $-K_X$ положительно пересекается с кривыми в слоях и $\dim Y < \dim X$.

Для многообразий Фано результат ПММ – всегда расслоение Мори. Откуда возникает естественный вопрос: насколько однозначно расслоение Мори $X \rightarrow Y$ определяется бирациональным классом X ? Этот вопрос приводит к понятию бирациональной жёсткости.

Определение. Многообразие Фано X с $\rho(X) = 1$ называется **бirationally жёстким**, если любое расслоение Мори, бирациональное X , изоморфно X .

Известные результаты

Существует достаточно много примеров бирационально жёстких трёхмерных многообразий Фано:

- гладкая квартика;
- полное пересечение квадрики и кубики;
- некоторые двойные накрытия;
- некоторые гиперповерхности во взвешенном проективном пространстве.

Эквивариантное обобщение

Если на многообразии X действует (конечная) группа $G \subset \text{Aut}(X)$, то естественно рассматривать только те бирациональные преобразования, которые сохраняют это действие. Это приводит к понятию **G-бirationally жёсткости**.

Интересный феномен состоит в том, что многообразие, не являющееся бирационально жёстким в обычном смысле, может оказаться **G-бirationally жёстким** после фиксации подходящей группы G .

Примеры

В размерности 2

Теорема [1]. Пусть G – конечная подгруппа в $\text{Aut}(\mathbb{P}^2)$. Тогда $\mathbb{P}^2$ является **G-бirationally жёсткой** $\iff G$ действует на $\mathbb{P}^2$ без неподвижных точек & $G \not\cong \mathfrak{A}_4$ & $G \not\cong \mathfrak{S}_4$.

В размерности 3

Теорема [2, 3, 4]. Пусть G – конечная подгруппа в $\text{Aut}(\mathbb{P}^3)$. Тогда $\mathbb{P}^3$ является **G-бirationally жёстким** $\iff G$ действует на $\mathbb{P}^3$ без неподвижных точек & в $\mathbb{P}^3$ нет **G-инвариантной** пары скрещивающихся прямых & нет **G-орбит** длины 4 & $G \not\cong \mathfrak{A}_5$ & $G \not\cong \mathfrak{S}_5$.

В размерности 4

В работе [5] показано, что $\mathbb{P}^4$ является **G-бirationally жёстким** для группы $G \simeq \text{PSp}_4(\mathbb{F}_3)$.

Пятимерное проективное пространство

Гипотеза. Пусть $G \subset \text{Aut}(\mathbb{P}^5)$ – простая группа Холла-Янко. Тогда $\mathbb{P}^5$ является **G-жёстким**.

Идея доказательства опирается на эквивариантную версию неравенства Нётера-Фано и проводится от противного. Если $\mathbb{P}^5$ не **G-(сверх)жёстко**, то существуют **G-инвариантная** подвижная линейная система $\mathcal{M} \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(\mathbf{n})|$ и натуральное $\mathbf{n}$, для которых пара $(\mathbb{P}^5, \frac{6}{\mathbf{n}}\mathcal{M})$ имеет неканонические особенности. Тогда дальнейшая стратегия – исключение неканонических центров разной размерности $\mathbf{d}$, $\mathbf{d} \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

d = 4: Исключается автоматически, т.к. система $\mathcal{M}$ подвижна.

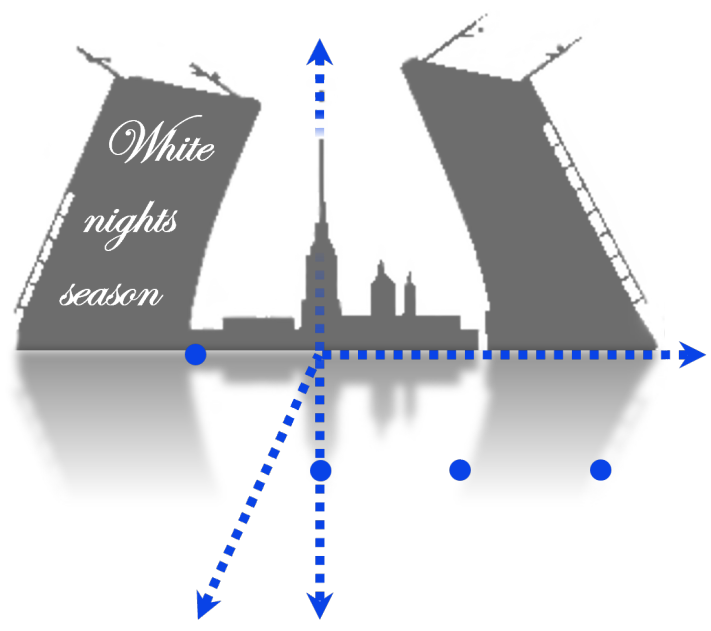
d = 3: Центры данной размерности исключаются, т.к. на $\mathbb{P}^5$ нет **G-инвариантных** трёхмерных гиперповерхностей маленькой степени.

d = 1 и d = 0: Перейдём от пары $(\mathbb{P}^5, \frac{6}{\mathbf{n}}\mathcal{M})$ с каноническими особенностями к паре $(\mathbb{P}^5, \frac{8}{\mathbf{n}}\mathcal{M})$ с нелогканоническими особенностями. Воспользуемся трюком Каваматы-Шокурова. После малого возмущения границы можно считать, что множество **Z** логканонических особенностей представляет собой дизъюнктное объединение минимальных логканонических центров, образующих одну **G-орбиту**. По теореме Надея об обращении в ноль имеем: $\mathbf{h}^1(\mathbb{P}^5, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(3) \otimes \mathcal{I}_{\mathbf{Z}}) = 0$. Откуда можно получить либо противоречие с длинами **G-орбит** на $\mathbb{P}^5$ (в случае **d = 0**), либо противоречие с оценкой на количество компонент **Z** и степень минимального центра **Z₁** (в случае **d = 1**).

Список литературы

- [1] D. Sakovics, **G**-birational rigidity of the projective plane, European Journal of Mathematics, 5 (2019), 1090-1105.
- [2] I. Cheltsov, C. Shramov, Three embeddings of the Klein simple group into the Cremona group of rank three, Transformation groups, 17 (2012), 303-350.
- [3] I. Cheltsov, C. Shramov, Five embeddings of one simple group, Transactions of the AMS, 366 (2014), 1289-1331.
- [4] I. Cheltsov, C. Shramov, Finite collineation groups and birational rigidity, Selecta Mathematica, 25 №5 (2019), paper 71.
- [5] I. Cheltsov, F. Mangolte, C. Shramov, On **G**-birational rigidity of projective spaces, preprint, arXiv:2604.2042 (2026).

Algebraic groups: the White Nights season VI



Flexibility of affine horospherical varieties

Veronika Kikteva

HSE, Moscow



Preliminaries

Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field of characteristic zero. For an affine variety X over $\mathbb{K}$ denote by $\text{Aut}(X)$ its group of regular automorphisms.

Flexibility

An algebraic subgroup of $\text{Aut}(X)$ is called a $\mathbb{G}_a$ -subgroup if it is isomorphic to the additive group of the ground field $\mathbb{K}$. We denote by $\text{SAut}(X)$ the subgroup of $\text{Aut}(X)$ generated by all $\mathbb{G}_a$ -subgroups and call it the group of special automorphisms. An affine algebraic variety X is called flexible if every regular point $x \in X^{\text{reg}}$ is flexible, that is, its tangent space $T_x X$ is spanned by tangent vectors to $\mathbb{G}_a$ -orbits.

A group G acts on a set X infinitely transitively if for each $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ it acts transitively on the set of m -tuples of distinct points of X .

Theorem. [1, Theorem 0.1] For an affine variety X of dimension ≥ 2 , flexibility of X is equivalent to transitivity of $\text{SAut}(X)$ -action on the regular locus X^{reg} and is equivalent to infinite transitivity of $\text{SAut}(X)$ -action on X^{reg} .

Rational polyhedral cones

Let V be a finite-dimensional $\mathbb{Q}$ -vector space. A subset $\sigma \subseteq V$ is called a finitely generated cone if there exists a finite set $v_1, \dots, v_k \in V$ such that

$$\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0}v_1 + \dots + \mathbb{Q}_{\geq 0}v_k.$$

All cones considered here are assumed to be finitely generated.

Let $\sigma \subseteq V$ be a cone. Denote by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the natural pairing between V and the dual space V^* . Consider the dual cone $\sigma^\vee$ in V^* , defined by

$$\sigma^\vee := \{w \in V^* \mid \langle w, v \rangle \geq 0 \text{ for all } v \in \sigma\}.$$

Since the cone σ is finitely generated, the cone $\sigma^\vee$ is also finitely generated and we have $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$. A face τ of σ is a subset of σ given by

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \{v \in \sigma \mid \langle u, v \rangle = 0\}$$

for some $u \in \sigma^\vee$. Each face is also a finitely generated cone.

The dimension of σ is the dimension of its linear span $\mathbb{Q}\sigma$. A cone $\sigma \subseteq V$ is called strictly convex if $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$. A cone σ is strictly convex if and only if the cone $\sigma^\vee$ has dimension equal to the dimension of V . An extremal ray of σ is a face of dimension one. If σ is strictly convex, its extremal rays are cones $\mathbb{Q}_{\geq 0}v_i$ for a minimal set of generators $\{v_1, \dots, v_k\}$.

There is a one-to-one correspondence between faces of σ and faces of $\sigma^\vee$. A face $\tau \preceq \sigma$ corresponds to the face

$$\bar{\tau} = \sigma^\vee \cap \tau^\perp = \{u \in \sigma^\vee \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ } \forall v \in \tau\} \preceq \sigma^\vee.$$

Note that $\dim \tau + \dim \bar{\tau} = \dim V$.

Let N be a lattice and $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ be a rational vector space spanned by N . Consider the lattice $M = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$ and the vector space $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = N_{\mathbb{Q}}^*$. Let σ be a strictly convex cone in $N_{\mathbb{Q}}$. Denote by $v_1, \dots, v_k$ the primitive integer vectors on extremal rays $\rho_1, \dots, \rho_k$ of σ . For each ray $\rho_i = \mathbb{Q}_{\geq 0}v_i$ we define

$$\mathfrak{R}_\rho(\sigma) := \{e \in M \mid \langle v_i, e \rangle = -1 \text{ and } \langle v_j, e \rangle \geq 0 \text{ for all } j \neq i\}.$$

Elements of $\mathfrak{R}_\rho(\sigma)$ are called Demazure roots of σ with distinguished ray ρ .

By a semigroup we mean a finitely generated semigroup with unit. Consider a subsemigroup $\mathfrak{F} \subseteq M$ and the corresponding cone $\sigma^\vee := \mathbb{Q}_{\geq 0}\mathfrak{F} \subseteq M_{\mathbb{Q}}$. We say that $\mathfrak{F}$ is saturated if $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. The semigroup $\mathfrak{F}_{\text{sat}} := \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}\mathfrak{F}$ is called the saturation of $\mathfrak{F}$ and elements of $\mathfrak{F}_{\text{sat}} \setminus \mathfrak{F}$ are called holes of $\mathfrak{F}$. An element m of $\mathfrak{F}$ is said to be a saturation point of $\mathfrak{F}$ if $(m + \sigma^\vee) \cap \mathbb{Z}\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$, that is, the shifted cone $m + \sigma^\vee$ has no holes. A face τ of $\sigma^\vee$ is called almost saturated if there exists a saturation point of $\mathfrak{F}$ in τ . Otherwise τ is called nowhere saturated.

Horospherical varieties

An irreducible algebraic variety X is horospherical if it admits an action of a connected linear algebraic group G such that the stabilizer of a generic point contains a maximal unipotent subgroup of G . We say that a horospherical variety X is complexity-zero if the action of G on X possesses an open orbit $\mathcal{O}$. We may assume that G is reductive.

For each character $\Lambda \in \mathfrak{X}(B)$ consider the weight subspace

$$S_\Lambda := \{f \in \mathbb{K}[G] \mid f(gb) = \Lambda(b)f(g) \text{ for all } g \in G, b \in B\}.$$

The set

$$\mathfrak{X}^+(B) := \{\Lambda \in \mathfrak{X}(B) \mid S_\Lambda \neq \{0\}\}$$

coincides with the set of dominant weights of G .

Let $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}^+(B)$ be a subsemigroup. Then the spectrum $X = X(\mathfrak{F})$ of the algebra

$$S_{\mathfrak{F}} := \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{F}} S_\Lambda$$

is an affine horospherical G -variety, and all affine horospherical G -varieties can be obtained in such a way.

Let $M := \mathbb{Z}\mathfrak{F}$ be the lattice generated by $\mathfrak{F}$ and $N = \text{Hom}(M, \mathbb{Z})$ be its dual lattice. Consider the rational vector spaces $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ and $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = M_{\mathbb{Q}}^*$. Let $\sigma^\vee$ be the cone generated by $\mathfrak{F}$, that is,

$$\sigma^\vee := \mathbb{Q}_{\geq 0}\mathfrak{F} \subseteq M_{\mathbb{Q}}.$$

By σ we denote the cone in $N_{\mathbb{Q}}$ dual to $\sigma^\vee$. Note that σ is strictly convex.

There is a one-to-one correspondence between faces of σ and G -orbits on X . Namely, if $\mathcal{O}_\tau \subseteq X$ is a G -orbit on X , corresponding to some face τ of σ , then the vanishing ideal of its closure $\overline{\mathcal{O}_\tau}$ has the form

$$I_\tau = \mathbb{I}(\overline{\mathcal{O}_\tau}) = \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{F} \setminus \tau} S_\Lambda.$$

Results

Let $X = X(\mathfrak{F})$ be an affine complexity-zero horospherical G -variety. Denote by σ and $\sigma^\vee$ the corresponding pair of dual cones.

Let $\mathcal{C}$ be the fundamental Weyl chamber, that is, the cone in $\mathfrak{X}(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ generated by $\mathfrak{X}^+(B)$. We denote by $\theta^\vee$ the cone $\mathcal{C} \cap M_{\mathbb{Q}}$. Consider $\theta \subseteq N_{\mathbb{Q}}$ dual to $\theta^\vee$. An extremal ray $\rho \preceq \sigma$ is significant if $\mathcal{O}_\rho$ has codimension one in X and consists of regular points. Denote by $\gamma = \gamma(X)$ the cone in $N_{\mathbb{Q}}$ generated by θ and the significant extremal rays of σ . We say that γ is the regularity cone of X .

Lemma 1. [2, Lemma 3.2] The algebra of regular functions on the regular locus X^{reg} of X has the form

$$\mathbb{K}[X^{\text{reg}}] = \bigoplus_{\Lambda \in \gamma^\vee \cap M} S_\Lambda.$$

Lemma 2. [2, Lemma 3.3, Lemma 3.4] Let ρ be an extremal ray of the cone σ such that $\text{codim}_X \mathcal{O}_\rho = 1$. Then the following conditions are equivalent.

- (1) There exists an M -homogeneous LND δ_e on $\mathbb{K}[X]$ of degree $e \in \theta^\vee$, where e is a Demazure root of σ with the distinguished extremal ray ρ .
- (2) The orbit $\mathcal{O}_\rho$ consists of regular points of X , i.e. ρ is significant.
- (3) The face $\bar{\rho} \preceq \sigma^\vee$ is almost saturated.

The following flexibility criterion for an affine complexity-zero horospherical variety is the main result of this work.

Theorem. [2, Theorem 4.1] Let X be an affine complexity-zero horospherical variety. Then the following conditions are equivalent.

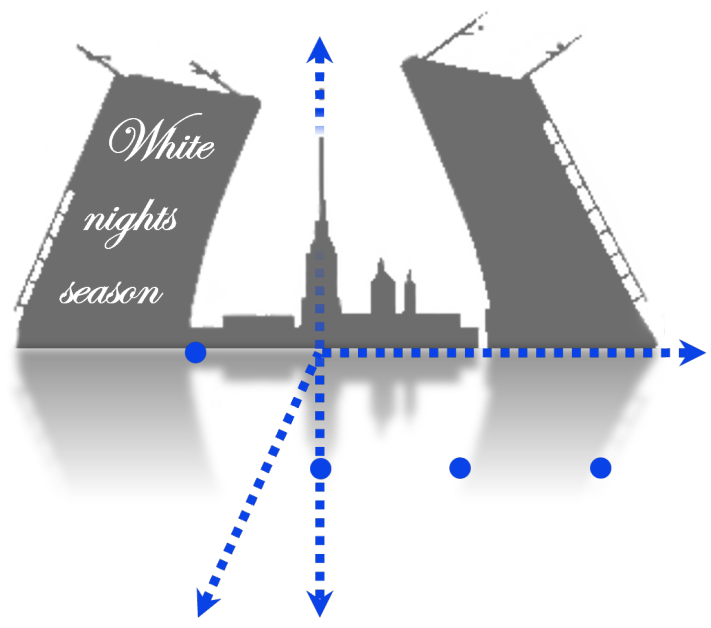
- (1) The variety X is flexible.
- (2) The regularity cone γ of the variety X is not contained in any hyperplane in $N_{\mathbb{Q}}$.
- (3) For each non-constant regular function $f \in \mathbb{K}[X]$ the intersection of the zero locus $V(f)$ and the regular locus X^{reg} is not empty.

Corollary 1. [2, Corollary 4.2] Suppose the semigroup $\mathfrak{F}$ has finitely many holes. Then the variety X is flexible if and only if σ is not contained in any hyperplane of $N_{\mathbb{Q}}$.

Corollary 2. [2, Corollary 4.3] Suppose the semigroup $\mathfrak{F}$ has a finite number of holes. Then the variety X is flexible if and only if it admits only constant invertible regular functions.

Список литературы

- [1] Ivan Arzhantsev, Hubert Flenner, Shulim Kaliman, Frank Kutzschebauch, and Mikhail Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. *Duke Math. J.* 162 (2013), no. 4, 767-823
- [2] Sergey Gaifullin and Veronika Kikteva. Flexibility criterion for affine horospherical varieties. arXiv:2511.18219



Аффинные моноиды с активной группой обратимых элементов

Нистюк Екатерина

ВШЭ, Москва



Основные понятия

Пусть X — нормальное неприводимое аффинное алгебраическое многообразие, и пусть дан морфизм $X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x * y$. Тогда X называется алгебраическим моноидом, если для всех $x, y, z \in X$ выполнено $x * (y * z) = (x * y) * z$ и найдется такая точка $1 \in X$, что $x * 1 = 1 * x = x$. В этом случае 1 называется нейтральным элементом. Группа обратимых элементов G алгебраического моноида X является алгебраической группой и открыта по Зарисскому в X .

Нас интересует случай, когда $G = U \rtimes T$, где T — тор, U — унитарная группа, полупрямое произведение задается гомоморфизмом $\psi : T \rightarrow \text{Aut } U$.

Лемма 1 [YZ] Пусть X — аффинный моноид с группой обратимых элементов $G = U \rtimes T$. Тогда на U можно ввести координаты таким образом, что $\psi(t) = \text{diag}(\chi_1(t), \dots, \chi_k(t)) \in \text{GL}(U)$, где $\chi_1(t), \dots, \chi_k(t)$ — характеры тора T .

В условиях леммы 1 группу обратимых элементов будем обозначать G_X , где $X = (\chi_1, \dots, \chi_k)$ — набор характеров.

Активные моноиды

Определение Полупрямое произведение $G = U \rtimes T$ называется активным, если $\dim T + \dim \text{Im} \psi = \dim G$.

Понятие активного полупрямого произведения было введено в работе [YZ].

Лемма 2 [YZ, лемма 2] Группа $G = G_X$ активна тогда и только тогда, когда характеры тора линейно независимы.

Следствие Пусть $G = U \rtimes T$ активна. Тогда $\dim U \leq \dim T$.

Предложение [YZ, Предложение 2] Пусть X — аффинный моноид с активной группой обратимых элементов G_X . Тогда X является торическим многообразием, а группа обратимых элементов G_X инвариантна относительно действия тора.

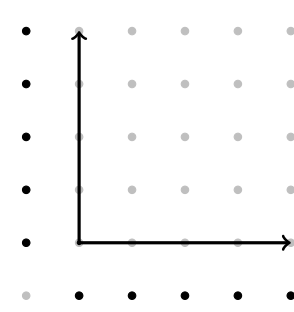
Утверждение Пусть полупрямое произведение $U \rtimes T$ активно. Тогда группа U является коммутативной, и, следовательно, $U \cong \mathbb{G}_a^k$.

Корни Демазюра

Пусть X_σ — аффинное торическое многообразие, а $p_1, \dots, p_m \in N$ — примитивные векторы на одномерных образующих конуса σ . Для каждого $1 \leq i \leq m$ определим множество

$$\mathfrak{R}_i = \{e \in M \mid \langle p_i, e \rangle = -1, \langle p_j, e \rangle \geq 0 \text{ для всех } i \neq j, 1 \leq j \leq m\}.$$

Элементы множества $\mathfrak{R} = \cup_{1 \leq i \leq m} \mathfrak{R}_i$ называются корнями Демазюра.



Определение Пусть $\tau = \langle p_1, \dots, p_k \rangle_{\geq 0}$ — регулярная k -мерная грань конуса σ . Назовем набор корней Демазюра $e_r^{(i)}$, где $i = 1, \dots, k, r = 1, 2$, согласованным с гранью τ , если $\langle p_j, e_1^{(i)} \rangle = \langle p_j, e_2^{(i)} \rangle = -\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $i, j = 1, \dots, k$.

Классификация

Теорема 1 Пусть $X = X_\sigma$ — аффинное торическое многообразие, конус σ содержит k -мерную симплицальную регулярную грань $\tau \subset \sigma$ и $e_1^{(i)}$ и $e_2^{(i)}$ — набор корней Демазюра, согласованных с τ . Тогда формула коумножения $[X] \rightarrow [X] \otimes [X]$

$$\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u \prod_{i=1}^k (1 \otimes \chi^{e_1^{(i)}} + \chi^{e_2^{(i)}} \otimes 1)^{\langle p_i, u \rangle}, \quad (1)$$

где $[X_\sigma] = \oplus_{u \in S_\sigma} \chi^u$, задает на X структуру моноида с группой обратимых элементов G_X , где $\chi_i = \chi^{e_1^{(i)} - e_2^{(i)}}$.

Теорема 2 Любой аффинный алгебраический моноид с активной группой обратимых элементов изоморфен моноиду из теоремы 1 для некоторого конуса σ , его k -мерной симплицальной регулярной грани τ и набора корней Демазюра $e_1^{(i)}$ и $e_2^{(i)}$, согласованного с τ ($i = 1, \dots, k$). Более того, группа обратимых элементов моноида из теоремы 1 активна тогда и только тогда, когда разности $e_1^{(i)} - e_2^{(i)}$ линейно независимы.

Идемпотенты

Напомним, что $x \in X$ называется идемпотентом, если $x * x = x$.

Теорема 3 Пусть X_σ — корневой моноид, γ — грань конуса σ . Обозначим через E_γ множество идемпотентов, лежащих в орбите O_γ . Тогда в обозначениях теоремы 1:

- Если $\tau \subseteq \gamma$, то $E_\gamma = \{x_\gamma\}$;
- Если найдется луч $p_i \notin \gamma$, и соответствующие корни Демазюра $e_1^{(i)}, e_2^{(i)} \notin \gamma^\perp$ или $e_1^{(i)}, e_2^{(i)} \in \gamma^\perp$, то $E_\gamma = \emptyset$;
- Если для всех лучей $p_1, \dots, p_s \notin \gamma$ из соответствующих корней Демазюра $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}$ ровно один лежит в $\gamma^\perp$, то $E_\gamma = \{\chi^u = 1 \mid u \in (\tau, \gamma)^\perp \cap S_\sigma\}$

Примеры

Рассмотрим конус σ в 4-мерной решетке N с одномерными образующими $p_1 = (1, 0, 0, 0), p_2 = (0, 1, 0, 0), p_3 = (0, 0, 1, 0), p_4 = (0, 1, 0, 1), p_5 = (1, 0, 0, 1)$. Тогда двойственный конус $\sigma^\vee \subset M$ будет задаваться образующими $q_1 = (1, 0, 0, 0), q_2 = (0, 1, 0, 0), q_3 = (0, 0, 1, 0), q_4 = (0, 0, 0, 1), q_5 = (1, 1, 0, -1)$. Рассмотрим функции $x_i = \chi^{q_i}$. Тогда алгебра регулярных функций соответствующего торического многообразия будет изоморфна $[X] \cong [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ с соотношениями $x_1 x_2 = x_4 x_5$. Тогда

$$X = \{x_1 x_2 = x_4 x_5\} \subseteq \mathbb{A}^5.$$

Рассмотрим двумерный регулярный конус $\tau = \langle p_1, p_2 \rangle_{\geq 0}$. Выберем корни Демазюра, согласованные с конусом τ (по 2 для каждого примитивного вектора p_1, p_2).

$$\begin{aligned} e_1^{(1)} &= (-1, 0, a_1, b_1), e_2^{(1)} = (-1, 0, a_2, b_2), \\ &\text{где } a_i \geq 0, b_j > 0, \\ e_1^{(2)} &= (0, -1, c_1, d_1), e_2^{(2)} = (0, -1, c_2, d_2), \\ &\text{где } c_i \geq 0, d_j > 0; \end{aligned}$$

При таком выборе корней Демазюра формула (1) будет иметь вид:

$$\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u (1 \otimes \chi^{e_1^{(1)}} + \chi^{e_2^{(1)}} \otimes 1)^{\langle p_1, u \rangle} (1 \otimes \chi^{e_1^{(2)}} + \chi^{e_2^{(2)}} \otimes 1)^{\langle p_2, u \rangle}$$

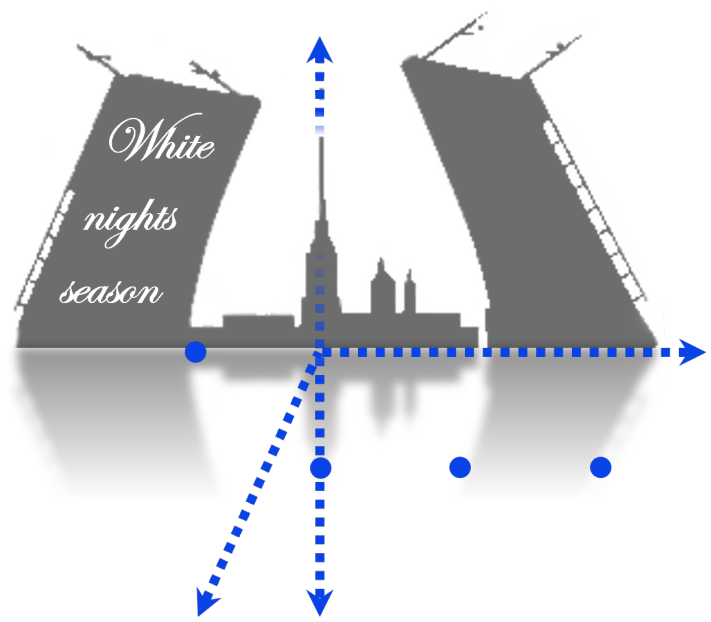
Умножение на X будет иметь вид:

$$\begin{aligned} x * y &= (x_1 y_3^{a_1} y_4^{b_1} + y_1 x_3^{a_2} x_4^{b_2}, x_2 y_3^{c_1} y_4^{d_1} + y_2 x_3^{c_2} x_4^{d_2}, \\ &x_3 y_3, x_4 y_4, x_5 y_3^{a_1+c_1} y_4^{b_1+d_1-1} + x_1 x_3^{c_2} x_4^{d_2-1} y_2 y_3^{a_1} y_4^{b_1-1} + \\ &+ x_2 x_3^{a_2} x_4^{b_2-1} y_1 y_3^{c_1} y_4^{d_1-1} + y_5 x_3^{a_2+c_2} x_4^{b_2+d_2-1}). \end{aligned}$$

Список литературы

- [YZ] Yulia Zaitseva, Affine monoids of corank one, Results in Mathematics. 79 (2024), no. 7, article 249
- [PZ] Ekaterina Nistiuk (Presnova), Yulia Zaitseva, Affine monoids with active group of invertible elements, submitted

Автоморфизмы аффинных T -многообразий сложности 1



Рассолов Кирилл

МГУ им. Ломоносова / ВШЭ, Москва

ef 11

Основные понятия

Пусть X — аффинное многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ характеристики 0. Группу $\text{Aut}(X)$ (регулярных) автоморфизмов можно наделять структурой аффинной инд-группы, т.е. рассматривать ее как прямой предел последовательности замкнуто вложенных аффинных многообразий $V_i \hookrightarrow V_{i+1}$. Это позволяет сформулировать для группы автоморфизмов некоторые понятия теории алгебраических групп. Например, связная компонента $\text{Aut}(X)^\circ$ является замкнутой нормальной подгруппой и факторгруппа $\text{Aut}(X)/\text{Aut}(X)^\circ$ не более чем счетна.

Под алгебраической подгруппой в $\text{Aut}(X)$ понимают алгебраическую группу G , замкнуто вложенную в $\text{Aut}(X)$ (т.е. в одно из многообразий V_i). Такое вложение равносильно заданию эффективного регулярного действия $G \times X \rightarrow X$. Элемент $g \in \text{Aut}(X)$ называется алгебраическим, если он содержится в связной алгебраической подгруппе. Подгруппа, порожденная всеми связными алгебраическими подгруппами $G \subseteq \text{Aut}(X)$, обозначается $\text{Aut}_{\text{alg}}(X)$. Вообще говоря, она состоит не только из алгебраических элементов. Важную роль играет подгруппа $\mathcal{U}(X)$, порожденная всеми $\mathbb{k}_+$ -подгруппами в $\text{Aut}(X)$, т.е. однопараметрическими унитарными алгебраическими подгруппами.

Определение. Аффинное многообразие X называется *полужестким*, если все $\mathbb{k}_+$ -подгруппы в $\text{Aut}(X)$ эквивалентны, т.е. имеют одинаковые орбиты общего положения на X .

Гипотеза 1 [PR23]. Если X — полужесткое аффинное многообразие, то $\text{Aut}(X)^\circ = T \ltimes \mathcal{U}(X)$, где T — алгебраический тор (максимальный в группе автоморфизмов).

Историческая справка

Известно [PR23, PR24], что эквивалентны следующие условия:

- группа $\text{Aut}(X)^\circ$ порождена алгебраическими подгруппами;
- каждый элемент в $\text{Aut}(X)^\circ$ является алгебраическим;
- $\text{Aut}(X)^\circ$ является прямым пределом алгебраических групп;
- $\text{Aut}(X)^\circ = T \ltimes \mathcal{U}(X)$, где T — максимальный тор в $\text{Aut}(X)$.

Более того, каждое из этих условий *влечет* любое из следующих (и новые условия эквивалентны между собой):

- каждый элемент в $\text{Aut}_{\text{alg}}(X)$ является алгебраическим;
- $\text{Aut}_{\text{alg}}(X) \subseteq \text{Aut}(X)^\circ$ является прямым пределом алгебраических групп;
- $\text{Aut}_{\text{alg}}(X) = T \ltimes \mathcal{U}(X)$;
- группа $\mathcal{U}(X)$ абелева;
- многообразие X полужесткое.

Основные результаты

Мы доказали следующий частный случай гипотезы 1:

Теорема. Пусть X — полужесткое аффинное многообразие. Допустим, что оно нормально, рационально, $\mathbb{k}[X]^\times = \mathbb{k}^\times$, $\text{Cl}(X)$ конечно порождена и максимальный тор T в $\text{Aut}(X)$ имеет размерность $\dim T = \dim X - 1$. Тогда $\text{Aut}(X)^\circ = T \ltimes \mathcal{U}(X)$.

Схема доказательства

Ввиду результатов Перепечко и Регеты достаточно доказать, что $\text{Aut}(X)^\circ = \text{Aut}_{\text{alg}}(X)$. Нетрудно понять, что вся группа автоморфизмов $\text{Aut}(X)$ порождается $\mathcal{U}(X)$ и нормализатором максимального тора $N_{\text{Aut } X}(T)$. Это следует из того, что всякий тор, сопряженный к T , лежит в группе $\text{Aut}_{\text{alg}}(X) = T \ltimes \mathcal{U}(X)$.

Таким образом, достаточно показать, что связная компонента нормализатора $N_{\text{Aut } X}(T)^\circ$ является алгебраической группой. Для этого мы пользуемся обобщенной конструкцией Кокса, которая позволяет по данному X построить такое аффинное многообразие $\bar{X}$ с действием диагонализуемой линейной алгебраической группы H , что X является категорным фактором $\bar{X}/H$, причем имеется точная последовательность

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & N_{\text{Aut } \bar{X}}(H) & \xrightarrow{\pi} & \text{Aut}(X) \longrightarrow 1 \\ & & & & \cup & & \cup \\ & & & & \mathbb{T} & & T \end{array}$$

В работе [HW] описаны многообразия $\bar{X}$ в случае, когда максимальный тор T в $\text{Aut}(X)$ имеет размерность $\dim X - 1$. В частности, $\bar{X}$ допускает действие тора $\mathbb{T}$ размерности $\dim \mathbb{T} = \dim \bar{X} - 1$.

Сопрягая торы при необходимости, можно считать, что $\pi^{-1}(T)^\circ = \mathbb{T}$. Поэтому достаточно доказать, что связная компонента $N_{\text{Aut } \bar{X}}(\mathbb{T})^\circ$ является алгебраической группой. Это сделано с помощью техники изолированных $\mathbb{T}$ -полуинвариантов, развитой в работе [BG]. А именно, можно построить конечное множество $\mathbb{T}$ -полуинвариантов, на весах которых нормализатор тора $\mathbb{T}$ действует перестановками. Также можно показать, что алгебра регулярных функций $\mathbb{k}[X]$ цела над подалгеброй, порожденной этими изолированными $\mathbb{T}$ -полуинвариантами и обратимыми функциями (которые могут быть на $\bar{X}$). Согласно известной теореме Розенлихта, группа $\mathbb{k}[X]/\mathbb{k}^\times$ (на которой также действует $N_{\text{Aut } X}(\mathbb{T})$) является конечно порожденной абелевой группой. Из этого можно вывести, что $N_{\text{Aut } X}(\mathbb{T})$ является дискретным расширением тора.

Примеры

Пусть $X = \{1 + x^3 + y^2 z^2 w = 0\}$. На таком многообразии действует двумерный тор T с координатами t, s по правилу

$$x \longmapsto x, \quad y \longmapsto ty, \quad z \longmapsto sz, \quad w \longmapsto t^{-2}s^{-2}w.$$

Изолированными полуинвариантами являются y, z, w , причем $N_{\text{Aut } X}(T)$ может переставлять только y, z . Группа автоморфизмов имеет вид

$$\text{Aut}(X) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes ((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times T) \ltimes \mathcal{U}(X).$$

Множитель $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ переставляет y, z . Централизатор тора есть $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \times T$, где конечная часть умножает x на корни третьей степени.

Список литературы

- [BG] Viktoriia Borovik, Sergey Gaifullin. *Isolated torus invariants and automorphism groups of rigid varieties*, Journal of Algebra, Volume 666, 2025, Pages 821-839
- [HW] Hausen J., Wrobel M., *Non-complete rational T-varieties of complexity one*, Math. Nachr. **290** (2017), No. 5–6, 815–826.
- [PR23] A. Perepechko, A. Regeta. *When is the automorphism group of an affine variety nested?*, Transformation Groups 28, 401–412 (2023).
- [PR24] A. Perepechko, A. Regeta. *Automorphism groups of affine varieties consisting of algebraic elements*. Proceedings of the American Mathematical Society 152 (2024), no. 6, 2377-2383

Автоморфизмы ненормальных аффинных
торических поверхностей

Селин Кирилл Владимирович

ВШЭ, Москва

Основные понятия и обозначения

Пусть $\mathbf{N} \cong \mathbb{Z}^2$ — решетка ранга 2, $\mathbf{M} = \text{Hom}(\mathbf{N}, \mathbb{Z})$ — двойственная к ней решетка, а $\langle \mathbf{m}, \mathbf{u} \rangle$ — спаривание соответствующих элементов.

Аффинный моноид $\mathbf{S}$ задает неприводимое аффинное торическое многообразие $\mathbf{X}_{\mathbf{S}} = \text{Spec } \mathbf{k}[\mathbf{S}]$ с действующим тором $\mathbf{T} \cong \mathbb{G}_{\mathbf{m}}^2$. Поверхность $\mathbf{X}_{\mathbf{S}}$ является нормальной тогда и только тогда, когда моноид $\mathbf{S}$ насыщен, то есть $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\text{sat}}$.

Ненормальное многообразие описывается ненасыщенным моноидом $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}^{\text{sat}}$, которое в свою очередь задается конусом $\sigma(\mathbf{S})$ и множеством «дыр» $\mathbf{A}(\mathbf{S}) = \mathbf{S}^{\text{sat}} \setminus \mathbf{S}$.

Определение. Корнем Демазюра моноида $\mathbf{S}$, ассоциированным с лучом $\rho \subset \sigma(\mathbf{S})$, называется характер $\mathbf{e} \in \mathbf{M}$, такой что $\langle \mathbf{e}, \mathbf{u}_{\rho} \rangle = -1$, где $\mathbf{u}_{\rho}$ — примитивный генератор луча ρ , и $\mathbf{e} + \mathbf{m} \in \mathbf{S}$ для всех $\mathbf{m} \in \mathbf{S}$, у которых $\langle \mathbf{m}, \mathbf{u}_{\rho} \rangle > 0$.

Всякий корень $\mathbf{e}$ индуцирует однородное локально нильпотентное дифференцирование алгебры $\mathbf{k}[\mathbf{S}]$ и действие аддитивной группы $\mathbb{G}_{\mathbf{a}}$ на $\mathbf{X}_{\mathbf{S}}$. Соответствующая подгруппа в $\text{Aut}(\mathbf{X})$ называется корневой. Подгруппу, порожденную тором $\mathbf{T}$ и всеми корневыми подгруппами, мы будем обозначать через $\text{Aut}^*(\mathbf{X})$.

Постановка задачи

Описать группы $\text{Aut}(\mathbf{X})$ для произвольных ненормальных торических поверхностей и выяснить, всегда ли связная компонента $\text{Aut}(\mathbf{X})^0$ совпадает с подгруппой $\text{Aut}^*(\mathbf{X})$.

Известные результаты

Группы автоморфизмов нормальных поверхностей хорошо изучены. Любая невырожденная нормальная особая аффинная торическая поверхность имеет вид $\mathbf{X}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} = \mathbb{A}^2 / \mathbf{G}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$, где $\mathbf{G}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} \cong \mathbb{Z} / d\mathbb{Z}$. Пусть $\mathcal{N}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}^{\pm}$ — нормализаторы группы $\mathbf{G}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$ в подгруппах де Жонкьера $\text{Jonq}^{\pm}(\mathbb{A}^2)$, $\mathbf{N}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$ — нормализатор $\mathbf{G}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$ в $\text{GL}_2(\mathbf{k})$, а $\mathbf{N}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}^+ = \mathbf{N}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} \cap \text{Jonq}^+(\mathbb{A}^2)$.

Теорема (И. Аржанцев, М. Зайденберг, 2013). Группа $\text{Aut}(\mathbf{X}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}})$ имеет структуру амальгамированного свободного произведения. А именно:

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbf{X}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}) &\simeq \mathcal{N}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}^+ / \mathbf{G}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} *_{\mathbf{T} / \mathbf{G}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}} \mathcal{N}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}^- / \mathbf{G}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} && \text{при } \mathbf{e}^2 \not\equiv 1 \pmod{d}, \\ \text{Aut}(\mathbf{X}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}) &\simeq \mathcal{N}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}^+ / \mathbf{G}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} *_{\mathbf{N}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}^+ / \mathbf{G}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}} \mathbf{N}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} / \mathbf{G}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}} && \text{при } \mathbf{e}^2 \equiv 1 \pmod{d}. \end{aligned}$$

Из структуры амальгамированного произведения напрямую следует, что для любой нормальной поверхности связная компонента $\text{Aut}(\mathbf{X}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}})^0$ всегда порождается действующим тором $\mathbf{T}$ и корневыми подгруппами, то есть совпадает с $\text{Aut}^*(\mathbf{X}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}})$.

Понятие корня Демазюра было перенесено на ненормальные многообразия в работе R. Díaz и A. Liendo. С их помощью было доказано следующее утверждение

Теорема (R. Díaz, A. Liendo, 2024). Пусть $\mathbf{X}_{\sigma}$ — нормальная аффинная торическая поверхность. Существует ненормальная поверхность $\mathbf{X}_{\mathbf{S}}$, нормализация которой есть $\mathbf{X}_{\sigma}$ с $\text{Aut}(\mathbf{X}_{\sigma}) = \text{Aut}(\mathbf{X}_{\mathbf{S}})$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{X}_{\sigma}$ отлична от $\mathbb{G}_{\mathbf{m}}^2$, $\mathbb{G}_{\mathbf{m}} \times \mathbb{A}^1$ и $\mathbb{A}^2$.

Из этого результата следует, что существуют ненормальные поверхности, группы автоморфизмов которых устроены так же, как и у нормальных. В частности, их связная компонента совпадает с $\text{Aut}^*(\mathbf{X})$.

Текущие результаты

Далее $\mathbf{X}$ — ненормальная аффинная торическая поверхность. Множество особых точек поверхности $\mathbf{X}$ является объединением орбит тора, состоящих из особых точек. В зависимости от того, какие одномерные орбиты в него входят, возникает три различных случая.

Случай 1. Обе одномерные орбиты лежат во множестве особых точек.

В этом случае моноид характеров не допускает корней Демазюра и такие поверхности являются жёсткими.

Предложение 1. Пусть нормализация $\mathbf{X}$ изоморфна $\mathbf{X}_{\mathbf{d}, \mathbf{e}}$, а множество особых точек $\mathbf{X}$ является объединением двух неприводимых кривых. Тогда $\text{Aut}(\mathbf{X}) \cong \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \ltimes \mathbf{T}$ при $\mathbf{e}^2 \equiv 1 \pmod{d}$, и $\text{Aut}(\mathbf{X}) \cong \mathbf{T}$ в противном случае.

Случай 2. Только одна одномерная орбита лежит во множестве особых точек.

Все корни Демазюра ассоциированы с единственным лучом, поэтому все корневые подгруппы коммутируют, так что этот случай соответствует почти жёстким поверхностям.

Обозначим через $\mathcal{U}$ подгруппу в $\text{Aut}(\mathbf{X})$, порожденную всеми корневыми автоморфизмами. Данная группа $\mathcal{U}$ изоморфна аддитивной группе счетно-мерного векторного пространства.

Предложение 2. Если ненормальная аффинная торическая поверхность $\mathbf{X}$ имеет неприводимое одномерное множество особых точек, то ее группа автоморфизмов порождается действующим тором и корневыми подгруппами. Более того, $\text{Aut}(\mathbf{X}) \cong \mathcal{U} \rtimes \mathbf{T}$. В частности, группа автоморфизмов связна.

Случай 3. Единственная особая точка.

Корни Демазюра ассоциированы с обоими лучами конуса. В отличие от нормального случая, здесь $\text{Aut}(\mathbf{X})^0$ не обязательно порождается тором и корневыми подгруппами. Хотя в силу результатов Díaz и Liendo для некоторых поверхностей это так, в общем случае ситуация иная.

Рассмотрим поверхность $\mathbf{X} \subset \mathbb{A}^4$, заданную уравнениями:

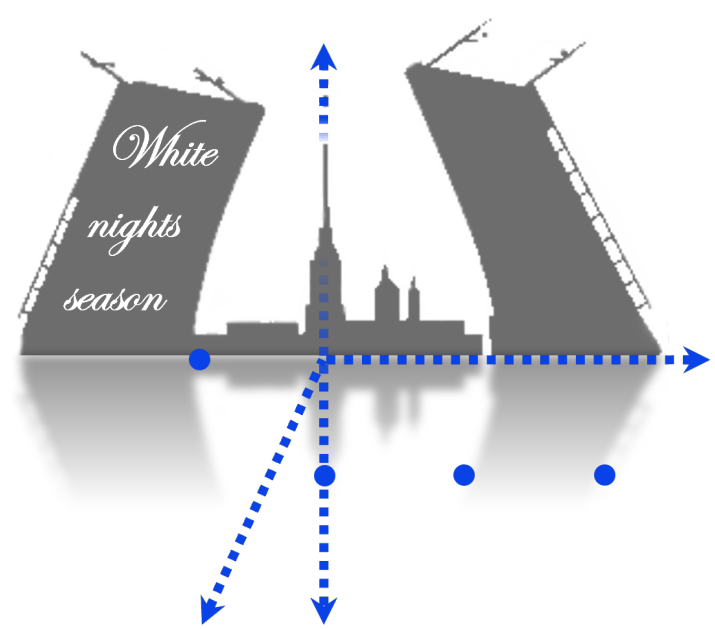
$$z^3 = w^2, \quad zx^2 = v^2, \quad xw = vz, \quad vw = xz^2$$

Ее нормализация — плоскость $\mathbb{A}^2$, а единственная «дыра» моноида — характер $(0, 1)$.

Теорема 1. Для данной поверхности $\mathbf{X}$ существует неприводимое алгебраическое семейство автоморфизмов $\varphi(\alpha, \beta)$ (где $\alpha, \beta \in \mathbf{k}$), которое не содержится в $\text{Aut}^*(\mathbf{X})$. В частности, подгруппа $\text{Aut}^*(\mathbf{X})$ является собственной подгруппой в $\text{Aut}(\mathbf{X})^0$.

Список литературы

- [1] I. Arzhantsev and M. Zaidenberg, Acyclic curves and group actions on affine toric surfaces, in Affine Algebraic Geometry, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2013, pp. 1-41
- [2] Болдырев И. А., Гайфуллин С. А. Автоморфизмы ненормальных торических многообразий // Математические заметки. — 2021. — Т. 110. — №. 6. — С. 837-855.
- [3] R. Díaz and A. Liendo, On the automorphism group of non-necessarily normal affine toric varieties, Int. Math. Res. Not. IMRN 2024 (2024), no. 2, 1624-1649



Гибкость тотальных координатных пространств

Чунаев Дмитрий Андреевич

МГУ им. М.В. Ломоносова, НИУ ВШЭ, Москва



Основные понятия

Доклад основан на совместной работе с С. Гайфуллиным и К. Шахматовым.

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Рассмотрим аффинное неприводимое многообразие X .

Будем называть $\mathbb{G}_a$ -действиями алгебраические действия аддитивной группы основного поля.

Определение 1. Точка $x \in X$ называется **гибкой**, если касательное пространство $T_x(X)$ порождается касательными векторами к проходящим через x орбитам $\mathbb{G}_a$ -действий на X .

Любая гибкая точка, как несложно проверить, является гладкой.

Определение 2. Многообразие X называется **гибким**, если все его гладкие точки являются гибкими.

Рассмотрим группу $\text{SAut}(X)$ специальных автоморфизмов на X , то есть подгруппу в группе всех регулярных автоморфизмов, порождённую всеми алгебраическими подгруппами, изоморфными аддитивной группе основного поля ($\mathbb{G}_a$ -подгруппами).

Интерес к гибким многообразиям обусловлен тем, что в работе [1] для аффинных многообразий X размерности хотя бы 2 доказана эквивалентность трёх условий: 1) гибкости X , 2) транзитивности действия $\text{SAut}(X)$ на X^{reg} и 3) бесконечной транзитивности действия $\text{SAut}(X)$ на X^{reg} . Последнее условие заключается в том, что для любого натурального m и для любых двух упорядоченных наборов $(a_1, \dots, a_m)$ и $(b_1, \dots, b_m)$ попарно различных точек существует $\varphi \in \text{SAut}(X)$ такой, что $\varphi(a_j) = b_j$ для всех j .

Также в работе [1] показано, что гибкие точки, если они есть, образуют открытую $\text{SAut}(X)$ -орбиту.

Определение 3. Многообразие X называется **обобщенно гибким**, если на нем есть хотя бы одна гибкая точка.

Из вышеннаписанного следует, что на обобщенно гибком многообразии будет открытое множество гибких точек.

Определение 4. Многообразие X называется **гибким в коразмерности 1**, если дополнение до множества гибких точек имеет коразмерность не меньше 2.

Пусть теперь многообразие X нормально, на нем нет непостоянных обратимых регулярных функций, и его группа классов дивизоров $\text{Cl}(X)$ конечно порождена.

Для каждого дивизора Вейля D рассмотрим линейное пространство:

$$\mathcal{O}(X, D) := \{f \in \mathbb{K}(X) \mid \text{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

В случае, если группа $\text{Cl}(X)$ свободна, выберем подгруппу K группы дивизоров Вейля, изоморфно проектирующуюся на $\text{Cl}(X)$, и определим следующую алгебру:

$$R(X) := \bigoplus_{D \in K} \mathcal{O}(X, D).$$

Эта алгебра не зависит от выбора группы K и называется **кольцом Кокса** многообразия X .

В случае, когда группа классов несвободна, также можно определить кольцо Кокса.

Если кольцо Кокса конечно порождено, то можно рассмотреть его спектр $\bar{X}$, который называется **тотальным координатным пространством** многообразия X . Многообразие X реализуется как категорный фактор многообразия $\bar{X}$ по действию некоторого квазиторатора N . Морфизм факторизации $q: \bar{X} \rightarrow X \simeq \bar{X}/N$ называется **реализацией Кокса** для многообразия X .

Основные результаты

В работе изучался вопрос о том, переносится ли гибкость/обобщенная гибкость/гибкость в коразмерности 1 с аффинного многообразия на его тотальное координатное пространство. Для этого сначала доказывается критерий гибкости точки на многообразии:

Предложение Пусть неприводимое аффинное многообразие X допускает реализацию Кокса $q: \bar{X} \rightarrow X$. Фиксируем такую точку $y \in \bar{X}$, что точка $q(y)$ регулярна. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1 Точка $q(y)$ является гибкой.
- 2 Касательное пространство $T_y(\bar{X})$ порождается пространством $T_y(N \cdot y)$ и касательными векторами к орбитам точки y всех $\mathbb{G}_a$ -подгрупп, коммутирующих с N .

Пользуясь этим утверждением можно доказать, что гибкость в коразмерности 1 переносится с многообразия на его тотальное координатное пространство:

Теорема Пусть неприводимое аффинное многообразие X допускает реализацию Кокса $q: \bar{X} \rightarrow X$. Тогда если X является гибким в коразмерности 1, то $\bar{X}$ также является гибким в коразмерности 1.

Из этой теоремы также следует факт, который ранее был доказан в [2]:

Следствие Пусть неприводимое гладкое аффинное многообразие X допускает реализацию Кокса $q: \bar{X} \rightarrow X$. Тогда если X является гибким, то $\bar{X}$ также является гибким.

Также был построен пример того, что обобщенная гибкость может не переноситься с многообразия на его тотальное координатное пространство:

Пример Рассмотрим гиперповерхность Y , которая задается таким уравнением: $xy^3 + z^3u^3 + v^4w^4 = 0$.

Определим на ней действие одномерного тора $\mathbb{T}$, задав степени образующих координатной алгебры:

$$\deg(x) = 0, \quad \deg(y) = 4, \quad \deg(z) = 5, \quad \deg(u) = -1, \quad \deg(v) = 4, \quad \deg(w) = -1.$$

В работе доказано, что категорный фактор по действию этого квазиторатора $X := Y/\mathbb{T}$ оказывается реализацией Кокса. При этом, многообразие Y не может быть обобщенно гибким, так как в работе доказывается, что $\mathbb{K}[Y]^{\text{SAut}(Y)} = \mathbb{K}[y]$. А многообразие X является обобщенно гибким, что легко проверить, пользуясь критерием.

Список литературы

- [1] I. Arzhantsev, H. Flenner, S. Kaliman, F. Kutzschebauch, M. Zaidenberg. Flexible varieties and automorphism groups. Duke Math. J. 162 (2013), no. 4, 767-823
- [2] I. Arzhantsev, A. Perepechko, H. Süß. Infinite transitivity on universal torsors. J. London Math. Soc. 89 (2014), no. 3, 762-778