

Молодежная школа института Эйлера по математическому анализу на Фонтанке

26–30 октября 2026 г.

Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, 27

Аннотации курсов лекций и докладов

Содержание

Курсы лекций	2
<i>Д. Н. Запорожец.</i> О нулях ортогональных и случайных полиномов	2
<i>А. И. Назаров.</i> Дополнительные главы вариационного исчисления	2
<i>А. П. Солодов.</i> Экстремальные задачи на классах голоморфных отображений круга в себя	2
<i>К. Ю. Федоровский.</i> Аппроксимация аналитическими функциями: классические задачи и современные результаты	3
Доклады	4
<i>Максим Афонин.</i> Эта-инвариант периодических эллиптических операторов	4
<i>Григорий Воинов.</i> Асимптотически точные оценки средней величины электрического поля в шаре	4
<i>Михаил Германсков.</i> Гауссовские процессы и смешанные объёмы	4
<i>Егор Добронравов.</i> О локально вогнутых и минимальных локально вогнутых функциях	4
<i>Никита Добронравов.</i> Функциональное обобщение теоремы Безиковича о дифференцировании мер	5
<i>Яков Жуков.</i> Взвешенная формула Лифшица–Крейна	5
<i>Анна Казакова.</i> Свойство q -лакунарности и дискретизация интегральных норм: функции Радемахера, хаосы Радемахера и их $\mathcal{P}$ -ичные аналоги	5
<i>Степан Павлов.</i> Критерий соболевости метрически-значного отображения плоскости	6
<i>Даниил Панов.</i> О динамическом построении гауссовского свободного поля	6
<i>Даниил Сбоев.</i> Операторы композиции пространств Соболева	6
<i>Максим Стемпоржецкий.</i> Метод получения точных оценок приближения через второй модуль непрерывности	6
<i>Алексей Чикалов.</i> О линейности операторов продолжения для следов пространств Бесова на метрических пространствах с мерой: предельный случай	6
<i>Екатерина Чилина.</i> Гомеоморфизмы трёхмерных многообразий с псевдоаносовскими аттракторами	7
Постеры	8
<i>Рамазан Аминев.</i> Автоморфизмы вещественных невырожденных квадрик предмаксимальной коразмерности в комплексном пространстве	8
<i>Тимур Добрынин.</i> Когда скачки метрикозначных отображений ловятся липшицевыми функциями	8
<i>Ника Кулешова.</i> Теоремы о продолжениях весовых пространств Соболева	8
<i>Мартин Стукан.</i> Теоремы о следах весовых пространств Соболева	9
<i>Платон Хаматов.</i> Пример многообразия, нерегулярного по Альфорсу–Давиду	9

Курсы лекций

О нулях ортогональных и случайных полиномов

Д. Н. Запорожец *ПОМИ РАН*

Курс будет посвящён различным вопросам, связанным с поведением нулей ортогональных и случайных полиномов, прежде всего в задачах на единичной окружности. Мы обсудим некоторые основные конструкции теории ортогональных полиномов и их операторные интерпретации, а также вероятностные модели, в которых случайными являются параметры меры или коэффициенты самого полинома. На этих примерах будут прослежены связи между комплексным анализом, спектральной теорией и теорией вероятностей. Особое внимание предполагается уделить глобальному и локальному распределению нулей и различным проявлениям универсальности.

Дополнительные главы вариационного исчисления

А. И. Назаров *ПОМИ РАН*

Я расскажу о применении вариационного исчисления для решения краевых задач УрЧП. На примере задачи Дирихле для простейшего полулинейного уравнения я продемонстрирую методы доказательства существования и несуществования решений, их единственности и множественности.

Для понимания курса необходимы курсы функционального анализа и уравнений математической физики, желательно с основными свойствами пространств Соболева.

Экстремальные задачи на классах голоморфных отображений круга в себя

А. П. Солодов *МГУ имени М. В. Ломоносова*

В геометрической теории функций важное место занимают различные экстремальные задачи, связанные с получением точных оценок функционалов на классах аналитических функций. К их числу относятся проблема коэффициентов, теоремы вращения и искажения, задачи о радиусах однолистности, звездности и выпуклости, теоремы о покрытии и др. Цель курса — познакомить слушателей с некоторыми такими задачами, в основном на классах ограниченных аналитических в круге функций, а также продемонстрировать красоту и мощь методов комплексного анализа.

В случае голоморфного отображения единичного круга в себя естественным образом возникают неподвижные точки, почти все из которых граничные. Расположение неподвижной точки (внутри или на границе круга) и ее характер (притягивающая или отталкивающая) оказывают существенное влияние на аналитические и геометрические свойства отображения, исследование которых нуждается в эффективных инструментах. Одним из них является лемма Шварца. Это простой и геометрически наглядный результат. Он изучается в базовом курсе комплексного анализа, однако в рамках стандартной программы студенты не имеют возможности в полной мере оценить его фундаментальность. Лемма Шварца и ее обобщения — тема, красной нитью проходящая через весь курс. Сила леммы Шварца будет продемонстрирована, в частности, при доказательстве теоремы Пика о разрешимости конечной интерполяционной задачи. Другим важным инструментом в наших исследованиях будет теорема Жюлиа–Каратеодори. В некотором смысле это аналог леммы Шварца на случай граничной неподвижной точки. Мы дадим геометрическую интерпретацию этого результата, его полезные переформулировки и обобщение на случай нескольких граничных неподвижных точек. Наконец, продемонстрируем эффективность теоремы Жюлиа–Каратеодори при решении экстремальных задач на классах функций с граничными неподвижными точками. Здесь мы сфокусируем внимание на задачах о наибольших областях однолистности и однолистного покрытия. Сначала приведем переработанные доказательства классических теорем Э. Ландау о точных кругах одно-

листности и однолистного покрытия на классе функций с внутренней неподвижной точкой, а затем, поняв причины существования этих кругов и увидев геометрию, стоящую за их конкретными размерами, получим, опираясь на теорему Жюлиа–Каратеодори, наибольшие области однолистности и однолистного покрытия на классах функций, имеющих граничные неподвижные точки.

В заключение будет дан экскурс в известную и до сих пор не решенную проблему Блоха, а также предложены новые подходы для ее исследования, базирующиеся на изложенных в курсе результатах.

Аппроксимация аналитическими функциями: классические задачи и современные результаты

К. Ю. Федоровский *МГУ имени М. В. Ломоносова*

Задачи аппроксимации функций различными аналитическими агрегатами (голоморфными или гармоническими многочленами, рациональными функциями комплексного переменного, гармоническими и полианалитическими функциями со специальным образом расположенными особенностями и пр.) — это классическая тематика современного анализа, корни которой восходят к работам классиков анализа К. Вейерштрасса и К. Рунге. Эти задачи имеют глубокие связи со многими разделами комплексного и функционального анализа, с теорией краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений и систем. В рамках курса мы проследим развитие теории приближений аналитическими функциями, начиная со ставших уже классическими работ Дж. Уолша и М. В. Келдыша об аппроксимации гармоническими функциями, А. Г. Витушкина и С. Н. Мергеляна об аппроксимации голоморфными функциями и многочленами и заканчивая недавно полученными критериями аппроксимации для решений общих эллиптических уравнений второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами.

Нас будут интересовать т. н. «качественные» задачи теории приближений, в которых основной вопрос — это вопрос о возможности аппроксимации данной функции или любой функции некоторого естественного класса соответствующими аналитическими агрегатами, но (пока) не вопрос о скорости аппроксимации или об оценках элементов наилучшего приближения. Мы обсудим природу условий приближаемости, возникающих в этих задачах, и недавние результаты о свойствах возникающих здесь емкостей и других аналитических характеристик множеств, в терминах которых формулируются критерии приближаемости.

Курс будет носить обзорный характер: основное внимание будет уделено постановкам задач, природе возникающих в них условий приближаемости (для классов функций и для индивидуальных функций) и формулировке недавних результатов, в то время как доказательства (а точнее говоря, схемы доказательств) будут даны для нескольких классических случаев, которые оказались модельными для всей рассматриваемой тематики.

Доклады

Эта-инвариант периодических эллиптических операторов

Максим Афонин *НИУ ВШЭ*

В докладе рассматривается эта-инвариант эллиптических операторов с периодическими коэффициентами на бесконечном цилиндре. Для таких операторов получены формулы логарифмического дефекта и вариации эта-инварианта, а также исследованы связанные с ним локальные свойства регуляризованного следа. В качестве приложения вычисляется эта-инвариант двумерных периодических операторов Шрёдингера, в частности оператора Шрёдингера в магнитном поле.

Асимптотически точные оценки средней величины электрического поля в шаре

Григорий Воинов *МКН СПбГУ*

Предположим, на единичной сфере в $\mathbb{R}^d$ расположены n единичных зарядов. Посчитаем среднее по шару значение абсолютной величины электрического поля, порожденного этими зарядами. Оказывается, что оно оценивается снизу величиной порядка $n^{(d-2)/(d-1)}$, и для некоторой конфигурации точек имеет место и верхняя оценка того же вида. Мы дадим обобщение результата на случай различных положительных зарядов и сфокусируемся на описании оптимальной конфигурации. Интерес также вызывает вспомогательный результат о разбиении сферы на части заданной меры, который находится на стыке анализа, метрической геометрии и комбинаторики.

Гауссовские процессы и смешанные объёмы

Михаил Германсков *ПОМИ РАН*

Формула Цирельсона устанавливает глубокую связь между теорией смешанных объёмов и теорией гауссовских процессов, связывая некоторый функционал процесса с производящей функцией внутренних объёмов. Эта производящая функция является целой функцией, если рассматривать её как функцию комплексного переменного, причём её порядок не превосходит единицы. В терминах её порядка и типа можно сформулировать критерии ограниченности и непрерывности траекторий соответствующего гауссовского процесса. В докладе мы дадим интерпретацию порядка этой функции, связав его с метрической энтропией и модулем непрерывности траекторий процесса.

О локально вогнутых и минимальных локально вогнутых функциях

Егор Добронравов *СПбГУ*

В докладе будет рассказано о текущих успехах в теории локально вогнутых и минимальных локально вогнутых функций, её применениях и связях с теорией функций Беллмана и теорией уравнений в частных производных.

Функциональное обобщение теоремы Безиковича о дифференцировании мер

Никита Добронравов *СПбГУ*

Классическая теорема Безиковича о дифференцировании мер говорит, что в евклидовом пространстве для двух локально конечных борелевских мер плотность непрерывной части одной меры по другой можно посчитать как предел отношения мер шаров. Мы изучали вопрос, когда меру шара можно заменить на интеграл функции. Оказалось, что это можно сделать, если модуль непрерывности функции удовлетворяет условию Дини.

Взвешенная формула Лифшица–Крейна

Яков Жуков *ПОМИ РАН*

Доклад посвящён взвешенному обобщению формулы Лифшица–Крейна для дробных относительно ядерных возмущений самосопряжённых операторов. Основное внимание будет уделено новой формуле следов и максимальности соответствующего класса относительно операторно-лифшицевых функций. Также будут рассмотрены устойчивость относительных классов Шаттена–фон Неймана вдоль линейного пути возмущения и непрерывная зависимость возмущения от параметра.

Свойство q -лакуарности и дискретизация интегральных норм: функции Радемахера, хаосы Радемахера и их $\mathcal{P}$ -ичные аналоги

Анна Казакова *МГУ имени М. В. Ломоносова*

Классическое L_2 - L_q -неравенство Хинчина является оценкой L_q -нормы многочлена по системе Радемахера через его L_2 -норму с константой, не зависящей от коэффициентов многочлена. Системы функций, для которых справедливо L_2 - L_q -неравенство Хинчина, называют системами q -лакуарности. Известно, что классический d -хаос Радемахера, т. е. система, состоящая из d -членных произведений функций Радемахера, является системой q -лакуарности согласно результату А. Вонами. Хаос Радемахера является подсистемой системы Уолша, т. е. системы характеров группы $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots$. В докладе мы рассмотрим подсистемы типа полиномиального хаоса в системах Виленкина — системах характеров групп вида $\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots$, где $p_k \geq 2$. Нами показано, что в случае ограниченных систем Виленкина такие системы являются системами q -лакуарности, а в случае неограниченных систем Виленкина не являются системами q -лакуарности ни для какого $q > 2$.

Во второй части доклада мы рассмотрим задачу дискретизации интегральных норм. Согласно результату G. Bennett, L. E. Dor, V. Goodman, W. B. Johnson, C. M. Newman, для дискретизации L_q -нормы с положительными весами в пространстве, порожденном N функциями из некоторой q -лакуарной системы, необходимо $m \geq cN^{q/2}$ точек (c не зависит от N). Следовательно, установление q -лакуарности для конкретной подсистемы влечет нижнюю оценку для числа точек, необходимых для дискретизации L_q -нормы в соответствующем пространстве. Отдельный интерес представляют вопросы о явном построении точек и весов, вычислении минимального числа точек дискретизации, а также о знаках весов. Мы рассмотрим эти вопросы для точной дискретизации L_2 -нормы в пространствах, порожденных классическими системами функций. Так, нами установлено, что гипотеза Ф. Дай, А. Примак, В. Н. Темлякова, С. Ю. Тихонова о положительности весов при точной дискретизации L_2 -нормы в вещественном подпространстве $X_N \subset L_2(\Omega, \mu)$ неверна даже для пространства, порожденного первыми N функциями Радемахера, для бесконечно многих N .

Критерий соболевости метрически-значного отображения плоскости

Степан Павлов *НГУ*

Доказано, что отображение из плоскости в метрическое пространство тогда и только тогда является соболевским в смысле Решетняка, когда все его композиции со скалярными липшицевыми функциями суть (скалярные) соболевские функции (от двух переменных).

О динамическом построении гауссовского свободного поля

Даниил Панов *СПбГУ*

Около 13 лет назад Х. Хеденмалм и П. Ниеминен опубликовали статью, в которой динамически построили гауссовское свободное поле на областях комплексной плоскости при помощи вариационной формулы Адамара. У нас получилось проделать аналогичное построение в дискретном контексте, на графах, при этом был получен дискретный аналог формулы Адамара. Оказалось, что эта конструкция, как и в непрерывном случае, обладает рядом интересных свойств, и, кроме того, непрерывное семейство полей является в некотором смысле пределом дискретного.

Операторы композиции пространств Соболева

Данил Сбоев *НГУ*

В докладе будут представлены результаты о характеристизации гомеоморфизмов, индуцирующих ограниченные операторы композиции пространств Соболева. Доказано, что с таким оператором ассоциирована борелевская мера в образе. С помощью этой меры доказываются геометрические свойства отображений.

Метод получения точных оценок приближения через второй модуль непрерывности

Максим Стемпоржецкий *СПбГУ*

Доклад посвящён обзору нового метода получения оценок приближения операторами через второй модуль непрерывности. Особенность нового метода в том, что оценки, получаемые с его помощью, имеют точную константу перед вторым модулем непрерывности без потери асимптотической точности шага. Мною была получена оценка оператора Баскакова, на примере которого будет обобщаться метод, также имеются аналогичные результаты для многих других классических операторов.

О линейности операторов продолжения для следов пространств Бесова на метрических пространствах с мерой: предельный случай

Алексей Чикалов *МИАН*

В докладе рассматривается задача о продолжении следов пространств Бесова в предельном случае на регулярных подмножествах метрических пространств с мерой. Известно, что пространство следов пространства Бесова с гладкостью θ/p на множестве E , θ -корегулярном по Альфорсу–Давиду, совпадает с соответствующим пространством $L_p(E)$. Показано, что при естественном условии неатомарности меры на части E ограниченного линейного оператора продолжения из пространства следов в исходное пространство Бесова не существует. Таким образом, нелинейность оператора продолжения в этом предельном случае носит принципиальный характер. Полученный результат является обобщением классического результата Буренкова и Гольдмана, полученного в евклидовом случае.

Гомеоморфизмы трёхмерных многообразий с псевдоаносовскими аттракторами

Екатерина Чилина *НИУ ВШЭ, Нижний Новгород*

Доклад посвящён классификации гомеоморфизмов замкнутых трёхмерных многообразий с неблуждающим множеством, являющимся дизъюнктивным объединением конечного числа цилиндрически вложенных псевдоаносовских аттракторов и репеллеров.

Постеры

Автоморфизмы вещественных невырожденных квадрат предмаксимальной коразмерности в комплексном пространстве

Рамазан Аминев *МГУ имени М. В. Ломоносова*

Квадрики $\text{Im } w = \langle z, \bar{z} \rangle$ служат простейшими локальными моделями CR -многообразий — вещественных подмногообразий в комплексном пространстве $\mathbb{C}^{n+k}$. В докладе для невырожденных квадрат коразмерности $k = n^2 - 1$ явно вычисляются алгебра Ли и группа их голоморфных автоморфизмов. Устанавливается, что структура и размерность алгебры симметрий определяются рангом матричного инварианта — матрицы нормали к гиперплоскости, порожденной компонентами формы Леви $\langle z, \bar{z} \rangle$. На основе этого инварианта последовательно описываются градуированные компоненты векторных полей.

Когда скачки метрикозначных отображений ловятся липшицевыми функциями

Тимур Добрынин *МФТИ*

В 2024 году Р. Д. Олейником, А. И. Тюленевым и независимо от них В. И. Бахтиным было доказано, что непрерывная функция $f: [a, b] \rightarrow X$, где X — метрическое пространство, имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда она имеет равномерно ограниченные вариации в посткомпозиции со всеми 1-липшицевыми функциями $\gamma: X \rightarrow \mathbb{R}$. После этого Д. М. Столяров вместе с А. И. Тюленевым исследовали, останется ли утверждение верным для разрывной функции f (класс пространств, для которых оно остаётся в силе, назвали LCJ — Lipschitz functions catch jumps). Оказалось, что далеко не каждое пространство принадлежит классу LCJ. В написанном в этом году препринте было приведено несколько контрпримеров. Например, все бесконечномерные банаховы пространства не лежат в классе LCJ. Мой постерный доклад основан на упомянутых выше статье и препринте. В нём я расскажу об интересных примерах LCJ и не-LCJ пространств и попытаюсь пролить свет на вопрос, с какими известными свойствами пространств связан факт (не)принадлежности пространства классу LCJ.

Теоремы о продолжениях весовых пространств Соболева

Ника Кулешова *НИУ ВШЭ*

Рассматривается задача продолжения функций из пространств следов весовых пространств Соболева. Для весов из локального класса Макенхаупта вводится пространство Бесова переменной гладкости, описывающее следы функций из весового пространства Соболева. Основным результатом является теорема продолжения: для каждой функции из пространства следов существует функция из весового пространства Соболева с заданным следом и контролируемой нормой. Продолжение строится с помощью специальных операторов усреднения.

Теоремы о следах весовых пространств Соболева

Мартин Стукан *МФТИ*

В докладе, основанном на статье А. И. Тюленева, рассматривается задача описания следов функций из весового пространства Соболева $\tilde{W}_p^l(\mathbb{R}^n, \gamma)$ с весом $\gamma \in A_p^{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющим локальному условию Макенхаупта, при $1 < p < \infty$, на плоскости размерности d , где $1 \leq d < n$. Установлено, что след функций из данного пространства принадлежит обобщенному пространству Бесова $\bar{B}_p^l(\mathbb{R}^d, \{\gamma_{k,m}\})$.

Пример многообразия, нерегулярного по Альфорсу–Давиду

Платон Хаматов *МФТИ*

Некоторые классические результаты геометрической теории меры были получены для регулярных по Альфорсу–Давиду подмножеств метрических пространств с мерой. Тем не менее оказывается, что это свойство может не выполняться даже для подмногообразий римановых многообразий. С. В. Иванов построил пример геодезической на (M, g) , $M \approx \mathbb{R}^n$, которая не является АД-регулярным подмножеством. Разбору этого примера и будет посвящен доклад.