Глава 5

Теневое исчисление

Разложение бинома

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

(см. п. 1.1) можно интерпретировать как свойство последовательности степеней $x^0, x^1, x^2, \ldots$. Оказывается, эта последовательность — не единственная последовательность с таким свойством. Например, если мы рассмотрим последовательность многочленов

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$$

(«нисходящие факториалы»), то для нее также

$$(x+y)_n = \binom{n}{0}(x)_n + \binom{n}{1}(x)_{n-1}(y)_1 + \binom{n}{2}(x)_{n-2}(y)_2 + \cdots + \binom{n}{n}(y)_n$$

(проверьте!). Такие последовательности многочленов называются *биномиальными*, их много, и многие из них оказываются очень интересными. Долгое время наличие у биномиальных последовательностей многочисленных общих свойств воспринималось как нечто таинственное и необъяснимое, почему их изучение и было названо umbral calculus, т.е. *теневое исчисление*. Работы Рота в 60-х годах прошлого века сорвали с теневого исчисления покров тайны, однако не уменьшили интерес к биномиальным последовательностям, поскольку они регулярно возникают в самых разных областях математики.

5.1 Определения и примеры

Итак, нас интересуют *биномиальные последовательности*, т.е. последовательности многочленов

$$p_0(x), p_1(x), p_2(x), \ldots,$$

в которых $p_0(x) = 1$, степень многочлена $p_n(x)$ равна n и старший коэффициент (т.е. коэффициент при x^n) в многочлене p_n равен 1, причем такие, что

$$\begin{aligned} p_n(x+y) &= \binom{n}{0} p_n(x)p_0(y) + \binom{n}{1} p_{n-1}(x)p_1(y) + \binom{n}{2} p_{n-2}(x)p_2(y) + \\ &\quad \dots + \binom{n}{n} p_0(x)p_n(y). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Помимо уже упомянутых последовательностей степеней и нисходящих факториалов биномиальными также являются

- последовательность восходящих факториалов

$$(x)^n = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1);$$

- последовательность Абеля

$$A_n(x) = x(x+n)^{n-1}.$$

Мы докажем это утверждение чуть ниже, а пока посмотрим, как может использоваться биномиальность.

5.2 Применения биномиальных последовательностей

Зная, что какая-то последовательность многочленов $p_n(x)$ биномиальна, мы можем, подставляя в определяющее соотношение (5.1) для этой последовательности различные числовые значения, получать интересные числовые тождества.

В качестве примера докажем следующее *тождество Абеля*:

$$2(n-1)n^{n-2} = \sum_{\substack{k,m \geq 1 \\ k+m=n}} \binom{n}{k} k^{k-1} m^{m-1}. \tag{5.2}$$

Например, при $n = 7$ тождество Абеля принимает вид

$$2 \cdot 6 \cdot 7^5 = 7 \cdot 1^0 \cdot 6^5 + 21 \cdot 2^1 \cdot 5^4 + 35 \cdot 3^2 \cdot 4^3 + 35 \cdot 4^3 \cdot 3^2 + 21 \cdot 5^4 \cdot 2^1 + 7 \cdot 6^5 \cdot 1^0.$$

Красота тождества объясняется его полной неожиданностью — все слагаемые в правой части равенства делятся лишь на первую степень простого числа 7, тогда как их сумма делится на очень высокую (пятую) степень семерки.

Чтобы доказать тождество Абеля, выпишем условие биномиальности последовательности Абеля:

$$
\begin{aligned}
(x+y)(x+y+n)^{n-1} \quad = \quad & \binom{n}{0}x(x+n)^{n-1} + \binom{n}{1}x(x+n-1)^{n-2}y \\
& + \binom{n}{2}x(x+n-2)^{n-3}y(y+2)^1 + \dots .
\end{aligned}
$$

Продифференцировав его сначала по x, а потом по y, получим

$$
\begin{aligned}
& (n-1)\left(2(x+y+n)^{n-2} + (n-2)(x+y)(x+y+n)^{n-3}\right) \\
& = \binom{n}{1}\left((x+n-1)^{n-2} + (n-2)x(x+n-1)^{n-3}\right) \\
& + \binom{n}{2}\left((x+n-2)^{n-3}(y+2)^1 + (n-3)x(x+n-2)^{n-4}(2y+2) + (x+n-2)^{n-3}y\right) \\
& + \dots .
\end{aligned}
$$

Подстановка $x = 0$, $y = 0$ оставляет в каждых внешних парах скобок ненулевым лишь первое слагаемое и дает в точности тождество Абеля (5.2).

Тождество Абеля является первым в серии замечательных комбинаторных тождеств. Последовательным дифференцированием предыдущего равенства и подстановкой в результат нулевых значений переменных можно получить другие тождества той же серии.

5.3 Биномиальные последовательности и сдвиги

Дифференцирование переводит n-ю степень переменной x в ее $(n-1)$-ую степень, умноженную на n:

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Подобные преобразования можно определить для любой последовательности многочленов $p_0, p_1, p_2, \dots$ переменной x, таких, что каждый многочлен p_k имеет степень k и коэффициент 1 при старшей степени переменной. Любой многочлен степени не выше n представляется в виде линейной комбинации многочленов $p_0, p_1, \dots, p_n$. На пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]$ определен *линейный оператор*

$$\Delta : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],$$

такой, что

$$\Delta : p_n \mapsto np_{n-1}.$$

Этот оператор определяется последовательностью многочленов p_n. Для биномиальных последовательностей он оказывается очень интересным (и в этом случае он называется *дельта-оператором* этой последовательности).

Проверим, например, что оператор

$$\frac{1}{1!}\frac{d}{dx}+\frac{1}{2!}\left(\frac{d}{dx}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{d}{dx}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(\frac{d}{dx}\right)^4+\dots=e^{d/dx}-1$$

является дельта-оператором для последовательности нисходящих факториалов. Здесь 1 в правой части обозначает тождественный оператор, т.е. преобразование, переводящее каждый многочлен в себя. Вспомним, что экспонента дифференцирования является сдвигом:

$$e^{d/dx}p(x)=p(x+1)$$

для любого многочлена p (см. п. 1.4). В частности, для нисходящих факториалов

$$\begin{aligned} e^{d/dx}(x)_n-(x)_n &= (x+1)_n-(x)_n \\ &= (x+1)x(x-1)\dots(x-n+2)-x(x-1)\dots(x-n+1) \\ &= nx(x-1)\dots(x-n+2) \\ &= n(x)_{n-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ — дельта оператор для последовательности степеней — и оператор $e^{\frac{d}{dx}}-1$ — дельта оператор для последовательности нисходящих факториалов — обладают общим свойством: оба эти оператора перестановочны с действием сдвига,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\delta_a &= \delta_a\frac{d}{dx} \\ (e^{\frac{d}{dx}}-1)\delta_a &= \delta_a(e^{\frac{d}{dx}}-1), \end{aligned}$$

где оператор δ_a действует на многочленах сдвигом, $\delta_a : f(x)\mapsto f(x+a)$. Действительно, проверить это утверждение для дифференцирования несложно:

$$\frac{d}{dx}\delta_a x^n=\frac{d}{dx}(x+a)^n=n(x+a)^{n-1}=\delta_a nx^{n-1}=\delta_a\frac{d}{dx}x^n.$$

А значит, оно справедливо и для любого ряда от дифференцирований, в том числе и для ряда $e^{\frac{d}{dx}}-1$.

Оказывается, что свойство перестановочности дельта-оператора со сдвигом является характеристическим для биномиальных последовательностей. А именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 5.3.1. *Дельта-оператор последовательности многочленов перестановочен со сдвигом если и только если соответствующая ему последовательность многочленов биномиальна.*

Доказательство. Проверим, что дельта-оператор биномиальной последовательности перестановочен со сдвигом. Поскольку члены $p_0, p_1, p_2, \dots$

этой последовательности образуют базис в пространстве многочленов, нам достаточно проверить выполнение равенств $\Delta\delta_a p_n = \delta_a \Delta p_n$ для любой постоянной a и для всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Имеем

$$\begin{aligned}
\Delta\delta_a p_n(x) &= \Delta p_n(x+a)\\
&= \Delta\left(\binom{n}{0}p_n(x)p_0(a) + \binom{n}{1}p_{n-1}(x)p_1(a) + \dots + \binom{n}{n}p_0(x)p_n(a)\right)\\
&= \binom{n}{0}np_{n-1}(x)p_0(a) + \binom{n}{1}(n-1)p_{n-2}(x)p_1(a) + \dots + \binom{n}{n-1}p_0(x)p_{n-1}(a)\\
&= n\left(\binom{n-1}{0}p_{n-1}(x)p_0(a) + \binom{n-1}{1}p_{n-2}(x)p_1(a) + \dots + \binom{n-1}{n-1}p_0(x)p_{n-1}(a)\right),
\end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что

$$\binom{n}{k}(n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k) = n\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = n\binom{n-1}{k}$$

для любого k. Заключительная правая часть есть не что иное как

$$\delta_a np_{n-1}(x) = \delta_a \Delta p_n(x),$$

что и требовалось.

Мы уже видели, что всякий ряд от дифференцирований перестановочен со сдвигом. Оказывается, справедлива и обратная теорема.

Теорема 5.3.2. *Любой оператор, перестановочный со сдвигом, представляется в виде ряда от дифференцирований.*

Доказательство.

Из доказанных выше теорем вытекает способ построения всех биномиальных последовательностей. А именно, возьмем произвольный ряд от дифференцирований, не имеющий свободного члена и со старшим коэффициентом 1,

$$D\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx} + d_2\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + d_3\left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \dots.$$

Тогда последовательность многочленов $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots$, для которой он является дельта-оператором, — биномиальна, и любая биномиальная последовательность многочленов получается таким образом. Биномиальная последовательность многочленов $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots$ для данного дельта-оператора $D(\frac{d}{dx})$ строится следующим образом.

Положим $p_0 = 1, p_1(x) = x$. Тогда многочлен $p_2(x) = x^2 + p_{21}x$ найдется из уравнения

$$Dp_2 = 2p_1,$$

т.е.

$$2d_2 + 2x + p_{21} = 2x,$$

откуда $p_{21} = -2d_2$. Аналогичным образом, для нахождения многочлена $p_3(x)$ необходимо решить уравнение

$$Dp_3 = 3p_2,$$

которое допускает единственное решение, и т.д.

5.4 Явное построение биномиальных последовательностей

Процедура построения биномиальных последовательностей с помощью дельта-оператора, описанная в предыдущем разделе, носит рекуррентный характер — чтобы построить многочлен p_{n+1} необходимо знать многочлен p_n и решить уравнение $\Delta p_{n+1} = np_n$. В этом разделе будет изложен более прямой способ построения биномиальных последовательностей. Исходным материалом для него является тень последовательности, давшая название всему исчислению.

Пусть $p_0, p_1, p_2, \dots$ — биномиальная последовательность многочленов. Составим из этой последовательности экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{P}(x,t) = p_0(x) + p_1(x)\frac{t}{1!} + p_2(x)\frac{t^2}{2!} + p_3(x)\frac{t^3}{3!} + \dots.$$

Теперь равенство (5.1) можно переписать в виде

$$\mathcal{P}(x+y,t) = \mathcal{P}(x,t)\mathcal{P}(y,t). \tag{5.3}$$

Действительно, коэффициент при t^n в левой части последнего равенства равен $\frac{p_n(x+y)}{n!}$, а в правой части равен

$$\sum_{k+l=n} \frac{p_k(x)}{k!}\frac{p_l(y)}{l!}.$$

Умножив обе части последнего равенства на $n!$, мы получаем в точности равенство (5.1). Тем самым, для того, чтобы найти все биномиальные последовательности многочленов, нам достаточно найти все функции $\mathcal{P}$ от двух переменных, удовлетворяющие равенству (5.3).

Забудем пока про вторую переменную t в равенстве (5.3) и будем искать функции P от одной переменной, такие, что

$$P(x+y) = P(x)P(y) \tag{5.4}$$

для любых значений переменных x и y. Но в п. 1.4 мы уже нашли все функции, преобразующие сложение в умножение, — это экспоненты, $P(x) = e^{cx}$ для некоторой постоянной c.

Теперь мы можем решить и уравнение (5.3)! Действительно, при любом значении t функция $\mathcal{P}(x,t)$ является экспонентой от cx для некоторой константы c. Если мы хотим, чтобы в разложении по степеням t коэффициенты были многочленами от x, то мы должны положить $c(0) = 0$, в остальном эта константа может зависеть от t произвольным образом, и мы получаем следующее утверждение.

Теорема 5.4.1. *Биномиальные последовательности многочленов взаимно-однозначно соответствуют экспоненциальным производящим функциям вида* $\mathcal{P}(x,t) = e^{xc(t)}$*, где* $c = c(t)$ *— произвольная функция (ряд) от* t*,* $c(0) = 0$*.*

Тем самым, для построения биномиальной последовательности многочленов достаточно задать последовательность чисел $c_1, c_2, \dots$ и положить $p_n(x)$ равным коэффициенту при $t^n/n!$ в функции

$$\mathcal{P}(x,t) = e^{x(c_1 t + c_2 t^2 + \dots)}.$$

Последовательность коэффициентов $c_1, c_2, \dots$, а также производящая функция $c = c(t)$ для этой последовательности, называется *тенью* соответствующей биномиальной последовательности.

Посмотрим, как выглядят функции $c(t)$ для некоторых имеющихся у нас примеров биномиальных последовательностей. Степеням x^n отвечает функция $c(t) = t$ (т.е. $c_1 = 1, c_2 = c_3 = c_4 = \dots = 0$). Последовательности нисходящих факториалов $(x)_n$ соответствует функция

$$c(t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots = \log(1+t),$$

т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x)_n \frac{t^n}{n!} = e^{x\log(1+t)} = (1+t)^x.$$

Действительно, это утверждение есть не что иное как бином Ньютона:

$$(1+t)^x = 1 + \binom{x}{1} t + \binom{x}{2} t^2 + \binom{x}{3} t^3 + \dots$$

В конце этой главы имеются задачи на нахождение теней для других биномиальных последовательностей и на построение биномиальных последовательностей по их теням.

Применим теперь к экспоненциальной производящей функции для биномиальной последовательности ее дельта-оператор. Получим

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{P}(x,t) &= 1 \cdot p_0(x)\frac{t^1}{1!} + 2 \cdot p_1(x)\frac{t^2}{2!} + 3 \cdot p_2(x)\frac{t^3}{3!} + \dots \\
&= p_0(x)\frac{t^1}{0!} + p_1(x)\frac{t^2}{1!} + p_2(x)\frac{t^3}{2!} + \dots \\
&= t\mathcal{P}(x,t).
\end{aligned}$$

Другими словами, дельта-оператор определяется условием

$$\Delta e^{xc(t)} = te^{xc(t)},$$

где $c(t)$ — тень биномиальной последовательности.

5.5 Последовательности Шеффер

Последовательности Шеффер обобщают биномиальные последовательности. Рассмотрим биномиальную последовательность многочленов $p_1, p_2, \dots$.

Последовательностью Шеффер для этой биномиальной последовательности $\{p_n\}$ называется любая последовательность многочленов $s_0, s_1, \dots$ степеней $0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющих соотношению

$$s_n(x+y) = \sum_{k+m=n} \binom{n}{k} s_k(x) p_m(y). \tag{5.5}$$

В отличие от определения биномиальной последовательности, здесь в правой части равенства вместо произведений членов само́й последовательности стоят произведения членов последовательности Шеффер и соответствующей биномиальной последовательности.

Для последовательности Шеффер $s_0, s_1, \dots$ ведем экспоненциальную производящую функцию

$$\mathcal{S}(x,t) = s_0(x) + s_1(x)\frac{t}{1!} + s_2(x)\frac{t^2}{2!} + s_3(x)\frac{t^3}{3!} + \dots.$$

Тогда равенства (5.5) перепишутся в виде

$$\mathcal{S}(x+y,t) = \mathcal{S}(x,t)\mathcal{P}(y,t). \tag{5.6}$$

Поделив это равенство на равенство (5.3), мы получаем

$$\frac{\mathcal{S}(x+y,t)}{\mathcal{P}(x+y,t)} = \frac{\mathcal{S}(x,t)}{\mathcal{P}(x,t)}.$$

Подстановка $x = 0$ дает

$$\frac{\mathcal{S}(y,t)}{\mathcal{P}(y,t)} = \frac{\mathcal{S}(0,t)}{\mathcal{P}(0,t)},$$

т.е. отношение функций $\mathcal{S}(y,t)$ и $\mathcal{P}(y,t)$ зависит лишь от t. Обозначив это отношение через $a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$, $a_0 \neq 0$, заключаем, что

$$\mathcal{S}(x,t) = a(t)\mathcal{P}(x,t) = a(t)e^{xc(t)}.$$

Наоборот, нетрудно видеть, что любая функция такого вида удовлетворяет определяющему соотношению (5.6):

$$\mathcal{S}(x+y,t) = a(t)e^{(x+y)c(t)} = a(t)e^{xc(t)}e^{yc(t)} = \mathcal{S}(x,t)\mathcal{P}(y,t).$$

Последовательности Шеффер, отвечающие $c(t) = t$, называются *последовательностями Аппеля*. К их числу относятся многие знаменитые последовательности ортогональных многочленов.

Например, *многочлены Эрмита* H_n имеют экспоненциальную производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = e^{-t^2/2}e^{xt},$$

многочлены Эйлера E_n имеют экспоненциальную производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+1}e^{xt},$$

многочлены Бернулли B_n имеют экспоненциальную производящую функцию

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t-1}e^{xt}.$$

5.6 Коалгебра многочленов

Теорема 5.6.1. *Пусть* $\{p_n\}, \{q_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *— две биномиальные последовательности. Рассмотрим линейное отображение пространства многочленов в себя, переводящее* p_n *в* q_n*. Тогда это отображение переводит любую биномиальную последовательность многочленов в биномиальную последовательность.*

Смысл этой теоремы в следующем. Введем на пространстве многочленов *коумножение* μ, определенное на базисных мономах следующим образом:

$$\mu : x^n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \otimes x^{n-k}.$$

Это определение естественно: коумножение можно ввести таким же образом на пространстве функций на любой *группе*. А именно, пусть G — группа с операцией, которую мы записываем как сложение, и пусть $\mathcal{F}(G)$ — пространство функций на этой группе (например, с вещественными значениями). Тогда групповое коумножение

$$\mu : \mathcal{F}(G) \to \mathcal{F}(G) \otimes \mathcal{F}(G) \equiv \mathcal{F}(G \times G)$$

определяется так:

$$\mu(f)(g,h) = f(g+h).$$

В нашем случае группа G это группа вещественных чисел по сложению, а $\mathcal{F}(G) = \mathbb{R}[x]$ это пространство многочленов на ней. Разумеется, на пространстве функций на группе можно ввести и структуру алгебры — функции можно перемножать, — однако в данный момент нам эта структура неинтересна.

Биномиальные последовательности многочленов выделяются тем условием, что коумножение действует на них так же, как и на последовательности степеней x^n:

$$\mu : p_n \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k \otimes p_{n-k}.$$

Всякое отображение, переводящее некоторую биномиальную последовательность в биномиальную последовательность, является изоморфизмом коалгебр. Поэтому оно переводит любую биномиальную последовательность в биномиальную последовательность. Все теневое исчисление есть не что иное как изучение этой коалгебраической структуры.

К сожалению, литературы о теневом исчислении на русском языке практически нет.

5.7 Задачи

Задача 5.1. Докажите, что последовательности нисходящих и восходящих факториалов, а также многочленов Абеля биномиальны.

Задача 5.2. Придумайте свои примеры биномиальных последовательностей.

Задача 5.3. Докажите, что $p_n(0) = 0$ при всех $n > 0$ для любой биномиальной последовательности многочленов p_n.

Задача 5.4. Докажите мультиномиальное свойство биномиальных последовательностей:

$$p_n(x_1 + \cdots + x_k) = \sum_{m_1+\cdots+m_k=n} \binom{n}{m_1, \ldots, m_k} p_{m_1}(x_1) \ldots p_{m_k}(x_k),$$

где

$$\binom{n}{m_1, \ldots, m_k} = \frac{n!}{m_1! \ldots m_k!}$$

это мультиномиальный коэффициент.

Задача 5.5. Используя биномиальность многочленов Абеля докажите следующие тождества Абеля:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(n-1)(n+6)n^{n-3} &= \sum_{\substack{k,m\geq 1\\ k+m=n}} \binom{n}{k} k^{k-2} m^{m-1} \\ (n-1)(n+6)n^{n-4} &= \sum_{\substack{k,m\geq 1\\ k+m=n}} \binom{n}{k} k^{k-2} m^{m-2}. \end{aligned}$$

Придумайте свои тождества Абеля.

Задача 5.6. Докажите, что биномиальность последовательности нисходящих факториалов можно записать в виде

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} \binom{y}{n-k}.$$

Задача 5.7. Обозначим через $t_{n,k}$ число лесов с n вершинами из k помеченных корневых деревьев. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} t_{n,k} x^k = x(x+n)^{n-1},$$

где в правой части стоит многочлен Абеля.

Задача 5.8. Найдите оператор Δ для последовательности восходящих факториалов и для последовательности Абеля.

Задача 5.9. Докажите, что последовательность многочленов $p_0, p_1, p_2, \dots$ является биномиальной в том и только в том случае, если оператор $\Delta : p_n \mapsto np_{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, эквивариантен относительно сдвига, т.е. если $\delta_a \Delta = \Delta \delta_a$ для любого значения a. Здесь δ_a это преобразование сдвига, $\delta_a : p(x) \mapsto p(x + a)$.

Например, оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ эквивариантен относительно сдвига:

$$\frac{d}{dx}\delta_a(x^n) = \frac{d}{dx}(x+a)^n = n(x+a)^{n-1} = \delta_a \frac{d}{dx}(x)^n = \delta_a(nx^{n-1}).$$

Задача 5.10. Проверьте, что оператор $e^{\frac{d}{dx}} - 1$ эквивариантен относительно сдвига.

Задача 5.11. Докажите, что всякий линейный оператор на пространстве многочленов, эквивариантный относительно сдвига и понижающий степень многочлена, имеет вид ряда от оператора дифференцирования

$$d_1 \frac{d}{dx} + d_2 \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + d_3 \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \dots = e^{b_1 \frac{d}{dx} + b_2 \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + b_3 \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \dots} - 1.$$

Отметим, что последние задачи дают универсальный способ построения биномиальных последовательностей многочленов. А именно, нужно взять произвольную последовательность коэффициентов $d_1, d_2, \dots$, $d_1 = 1$ и последовательно решать уравнения $\Delta p_n = np_{n-1}$, где Δ — дифференциальный оператор

$$\Delta = d_1 \frac{d}{dx} + d_2 \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + d_3 \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \dots$$

Задача 5.12. Докажите по индукции, что эта последовательность уравнений разрешима для любой последовательности коэффициентов $d_1, d_2, \dots$, начинающейся с 1 (это условие означает, что оператор Δ понижает степень многочлена ровно на 1, причем $\Delta p_n = np_{n-1}$).

Задача 5.13. Найдите тени $c = c(t)$ для последовательности восходящих факториалов $(x)^n$, последовательности многочленов Абеля $A_n(x) = x(x + an)^{n-1}$ и других известных вам биномиальных последовательностей многочленов.

Задача 5.14. Докажите, что если $c = c(t)$ — тень для данной биномиальной последовательности многочленов, то оператор $c^{-1}(\frac{d}{dx})$ является дельта-оператором для этой последовательности.

Задача 5.15. Пусть Δ — дельта-оператор, эквивариантный относительно сдвига, и пусть $\{p_n\}$ — соответствующая ему биномиальная последовательность. Докажите, что последовательность многочленов $s_0, s_1, s_2, \dots$ степеней $0, 1, 2, \dots$ является последовательностью Шеффер для $\{p_n\}$, если и только если

$$\Delta s_n = ns_{n-1} \text{ для } n = 1, 2, \dots.$$

Здесь, в отличие от биномиальных последовательностей, мы не требуем, чтобы многочлены s_n принимали значение 0 при $x = 0$, т.е. делились бы на x. В результате каждому дельта оператору отвечает много последовательностей Шеффер.

Задача 5.16. Выпишите несколько первых многочленов Эрмита, Эйлера и Бернулли.

Задача 5.17. Докажите, что многочлены Эрмита имеют вид

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}.$$

Задача 5.18. Докажите свойство ортогональности многочленов Эрмита:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2/2} dx = 0$$

при $m \neq n$.

Задача 5.19. Докажите, что

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x).$$

Задача 5.20. Докажите, что

$$H_n(x) = e^{-\frac{d^2}{dx^2}} x^n.$$

Задача 5.21. Докажите, что многочлены Бернулли имеют вид

$$B_n(x) = \frac{\frac{d}{dx}}{e^{\frac{d}{dx}} - 1} x^n.$$

Задача 5.22. Докажите, что многочлены Бернулли однозначно определяются условием

$$\int_x^{x+1} B_n(\xi) d\xi = x^n.$$

Другими словами, интеграл на отрезке $[x, x+1]$ — обратный оператор к дифференциальному оператору из предыдущей задачи.

Задача 5.23. Докажите следующую формулу для суммы k-х степеней:

$$1^k + 2^k + \cdots + n^k = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(0)}{k+1}.$$

Задача 5.24. Докажите, что

$$\begin{aligned} B_n(x+1) - B_n(x) &= n x^{n-1} \\ E_n(x+1) - E_n(x) &= 2x^n. \end{aligned}$$

Задача 5.25. Введем на последовательностях многочленов следующую операцию, называемую теневой композицией. Пусть $p = (p_0, p_1, p_2, \dots)$ и $q = (q_0, q_1, q_2, \dots)$ — две последовательности многочленов, в которых $\deg\ p_n = \deg\ q_n = n$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} x^k$, $q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} x^k$. Определим n-й член последовательности $(p \circ q)$ равенством

$$(p \circ q)_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} q_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=0}^{k} a_{n,k} b_{k,m} x^m.$$

Очевидно, что последовательность мономов $e = (1, x, x^2, \dots)$ является единицей относительно этого действия:

$$(p \circ e)_n = (e \circ p)_n = p_n$$

для любой последовательности p.

Докажите, что множество всех последовательностей Шеффер образуют группу относительно операции теневой композиции. Докажите, что множество всех последовательностей Аппеля образует нормальную коммутативную подгруппу в этой группе, а множество всех биномиальных последовательностей — некоммутативную (и ненормальную)подгруппу в ней. Докажите, что группа всех последовательностей Шеффер является полупрямым произведением этих подгрупп.