Аннотация лекции за 01.09.21 и частично лекции за 08.09.21.

Введение. Обзор предельных теорем для сумм независимых случайных величин, случайных процессов и их приращений.

Сначала мы рассмотрели известные теоремы для сумм независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин (с.в.)

Мы обсудили усиленные законы больших чисел (УЗБЧ) Колмогорова и Бореля (бернуллиевские величины) и их роль в теории вероятностей и математической статистике (эмпирический закон стабилизации частот, теорема Гливенко-Кантелли, свойства оценок и статистик критериев).

Мы рассмотрели законы повторного логарифма (ЗПЛ) Хартмана—Винтнера и Хинчина (бернуллиевские величины). Условия в теореме Хартмана—Винтнера являются также необходимыми (Мартикайнен, Розальски, Пруитт). ЗПЛ может иметь место при отсутствии дисперсий у слагаемых. Вид нормировки в теореме Хартмана—Винтнера связан с нормировкой в центральной предельной теореме (ЦПТ) Леви. ЦПТ можно обобщать на случай бесконечных дисперсий. В пределе будут устойчивые законы. В случае сходимости к асимметричным устойчивым законам можно получать обобщения ЗПЛ Хартмана—Винтнера. Меняется нормировка сумм. В качестве метода доказательства здесь применяется метод анализа вероятностей больших уклонений (ВБУ).

Далее мы перешли к сильным предельным теоремам для приращений сумм. Здесь исследуется почти наверное (п.н.) поведение максимумов

$$U_n = \max_{0\leqslant k\leqslant n-a_n}(S_{k+a_n}-S_k), \quad W_n = \max_{0\leqslant k\leqslant n-a_n}\max_{0\leqslant j\leqslant a_n}(S_{k+a_n}-S_k)$$

и некоторых других статистик. Через S_k обозначена сумма k первых н.о.р. с.в. из $\{X_n\}$, а через $\{a_n\}$ — последовательность натуральных чисел, $a_n\leqslant n$. Максимумы U_n и W_n имеют простой смысл в игровых терминах и являются естественными объектами изучения для теории вероятностей. В зависимиости от длины приращений их поведение существенно меняется. При этом, $U_n=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}X_k$ при $a_n\equiv 1$ и $U_n=S_n$ при $a_n\equiv n$. Поэтому результаты связаны с теорией экстремальных порядковых статистик и теорией суммирования н.о.р. с.в.

Сначала мы обсудили законы Эрдёша—Реньи и Шеппа ($a_n=[c\ln n]$) и их расширения Мейсона ($a_n=o(\ln n)$) (малые приращения). Нормирующая последовательность зависит от распределения X_1, а иногда даже его определяет однозначно (сильная неинвариантность.) Это — отличие от УЗБЧ и ЗПЛ, где участвуют только первые моменты.

Мы привели также закон Эрдёша—Реньи для винеровского процесса и сделали замечание о проблемах при переходе к процессам с непрерывным временем.

Затем мы рассмотрели законы Чёргё—Ревеса ($a_n/\ln n \to \infty$, большие приращения). Нормирующая последовательность здесь зависит от первых моментов как в ЗПЛ. ЗПЛ включен как частный случай. Доказательство основано на результатах для винеровского процесса и результатах Комлоша—Майора—Тушнади о сильной аппроксимации сумм винеровским процессом (траектории сумм и процесса близки). Метод удобен, но не дает наилучших результатов, так как предусматривает одинаковые моментные условия на оба хвоста распределения X_1. Этого недостатка нет у метода анализа ВБУ.

Далее мы обсудили оценки ВБУ и их появление при применении неравенств Маркова и Чебышёва. Функция больших уклонений (преобразование Лежандра логарифма производящей функции моментов) определяет вид нормировки в случае малых приращений. Если экспоненциального момента нет, используется метод усечений. При этом малые приращения не рассматриваются.

Потом мы представили единый подход (предложенный автором курса) к перечисленным выше результатам. Здесь поставлена задача: найти $\{b_n\}$ и необходимые и/или достаточные условия для

$$\limsup \frac{U_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

или, если возможно, для

$$\lim \frac{U_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Все перечисленные выше результаты укладываются в эту схему. Ответ:

$$b_n = a_n \gamma \left(\frac{\ln \frac{n}{a_n} + \ln \ln n}{a_n} \right),$$

где $\gamma(x)$ — функция больших уклонений.

Затем мы сформулировали цели курса: доказать последнюю формулу (в случае конечного и бесконечного второго момента X_1) и доказать аналогичные результаты для некоторых классов случайных процессов. Предполагается рассмотреть однородные процессы с независимыми приращениями (в частности, винеровский, пуассоновский, некоторые устойчивые, сложные пуассоновские) и процессы восстановления. Тем самым будет построена единая теория, охватывающая УЗБЧ, ЗПЛ, законы Эрдёша—Реньи и Шеппа, расширение Мэйсона, законы Чёргё—Ревеса. При этом понадобится предварительно обсудить также устойчивые законы, условия сходимости к ним и результаты о поведении ВБУ в этих случаях (включая негауссовский случай).

В начале второй лекции обсуждался вид нормировки в теоремах для случайных процессов с непрерывным временем, определение и свойства процессов восстановления (двойственность с суммами н.о.р. с.в.) и сложных пуассоновских процессов.