Аннотация лекции за 22.09.21.

§2. Области притяжения (продолжение).

Завершено доказательство последней леммы. Завершено доказательство теоремы о том, что только устойчивые законы имеют области притяжения. Это объясняет их значение в теории суммирования н.с.в.

§3. Моменты и экспоненты устойчивых законов.

Цель параграфа — доказательство следующей теоремы.

Теорема 6. *Если X — устойчивая с.в. с показателем α, то $E|X|^\beta < \infty$ для любого $\beta \in (0, \alpha)$.*

Из этой теоремы и ЦПТ Леви вытекает следующий важный результат.

Следствие 1. $\alpha \in (0, 2]$.

Примеры устойчивых х.ф. из §1 показывают, что существуют устойчивые распределения со всеми $\alpha \in (0, 2]$. Кроме того, есть еще два параметра — параметры сдвига и масштаба. Позже мы установим, что параметров у всякого устойчивого невырожденного негауссовского закона на самом деле четыре.

Начато доказательство теоремы.

Конечность момента $E|X|^\beta$ эквивалентна сходимости интеграла

$$I = \int\limits_0^\infty x^{\beta-1} P(|X| \geqslant x) dx.$$

Удобнее перейти от с.в. X к ее симметризации Y ($Y = X_1 - X_2$, где X_1 и X_2 — независимые копии X). Для этого доказана следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть m — медиана X. Для любого $x > 0$ выполняются неравенства*

$$P(|X - m| \geqslant x) \leqslant P(|Y| \geqslant x) \leqslant 2P\left(|X| \geqslant \frac{x}{2}\right).$$

Следовательно, нужно доказывать сходимость интеграла, получаемого из I заменой $P(|X| \geqslant x)$ на $P(|Y| \geqslant x)$. Для оценки последней вероятности доказан следующий результат, имеющий и самостоятельный интерес.

Лемма 4. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — н.о.р. с.в. с симметричным распределением, S_n — их сумма. Тогда*

$$P(S_n \geqslant x) \geqslant \frac{1}{2} P\left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} X_k \geqslant x\right).$$