Аннотация лекции за 29.09.21.

§3. Моменты и экспоненты устойчивых законов (продолжение).

Доказана теорема о том, что устойчивые величины с экспонентой α имеют моменты порядка $\beta < \alpha$. Момент порядка α может не существовать.

§4. Каноническое представление устойчивых х.ф.

Цель настоящего параграфа — найти вид спектральной функции Леви для устойчивых законов.

Теорема 7. *Х.ф. $f(t)$ устойчива тогда и только тогда, когда она б.д. и в формуле Леви*

$$f(t) = \exp\left\{ it\gamma - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int\limits_{-\infty}^{0} k(t,x)dM(x) + \int\limits_{0}^{\infty} k(t,x)dN(x) \right\}$$

либо

1) $M(-x) = c_1 x^{-\alpha}$ и $N(x) = -c_2 x^{-\alpha}$ при $x > 0$, где $c_1 \geqslant 0$, $c_2 \geqslant 0$, $c_1 + c_2 > 0$, $\alpha < 2$, а $\sigma^2 = 0$,

либо

2) $M(-x) = N(x) = 0$ при всех $x > 0$, $\alpha = 2$, $\sigma^2 \geqslant 0$.

Здесь $\gamma \in \mathbb{R}$, $k(t,x) = e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}$.

Теорема доказана.

§5. Явный вид устойчивых х.ф.

В прошлом параграфе найден вид спектральной функции Леви устойчивых х.ф. Это дает возможность вывести явные формулы для них.

Сформулирован основной результат этого параграфа (следующая теорема) и описан детальный план его доказательства.

Теорема 8. *Х.ф. $f(t)$ устойчива тогда и только тогда, когда*

$$f(t) = \exp\left\{ it\gamma - c|t|^\alpha (1 - i\beta \frac{t}{|t|} \omega(t,\alpha)) \right\},$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $c \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 2$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\omega(t,\alpha) = \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}$ при $\alpha \neq 1$ и $\omega(t,\alpha) = -\frac{2}{\pi} \ln|t|$ при $\alpha = 1$.

γ — параметр сдвига, c — параметр масштаба, α — показатель устойчивого закона, β — параметр симметрии. При $\beta = 0$ распределение симметрично.