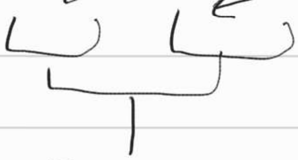
15 монет   14 наст   1 фальш.

① 5 ? 5   5

= >

⑤ > ⑤   ⑤

②



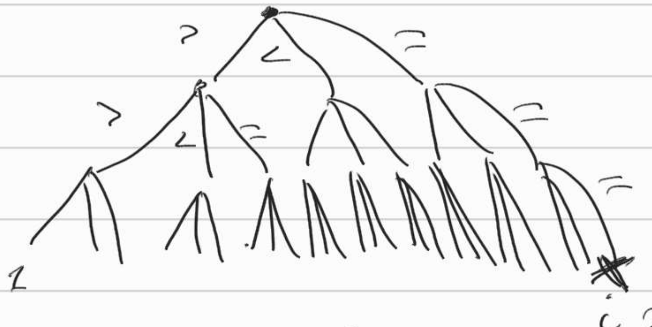
5

③ oo   oo   o

=

oo > oo

④



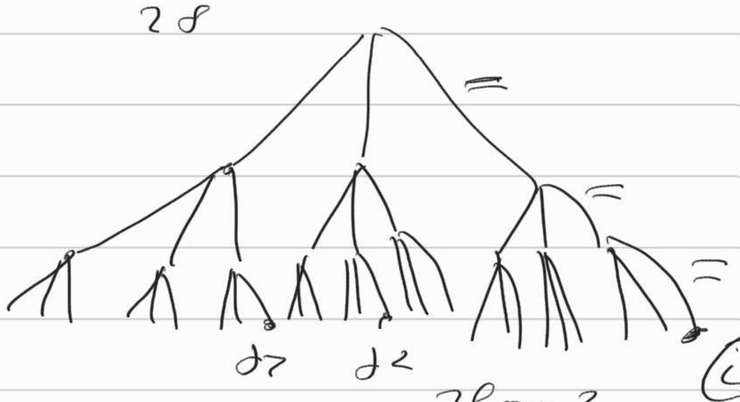
30   28

$\boxed{28+1}$

$14\cdot 2+\underline{1}$

14 монет   3 взвеш.

28



i фальш. <

$j\neq i$ → j ф. >, j ф. <

27 вариантов

Равномерное распр.

$$H(\beta_1, \beta_2, \beta_2) \overset{3\log 3}{=}$$

$$\beta_i \in \{<, =, >\}$$

$$\le$$

$$H(\beta_1)+H(\beta_2)+H(\beta_3) \le 3\log 3$$

$$H(\beta_1) = H(\beta_2) = H(\beta_3) = \log 3$$

$$\Pr\left[\underbrace{\quad}_{k} < \underbrace{\quad}_{k}\right] = \frac{2k}{27} = \frac{1}{3}$$

§ Энтропия и однозначно декодируемые коды.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

$\quad\;\; p_1 \quad p_2 \qquad\quad p_k$

$C : A \to \{0,1\}^*$ код

$C : A^* \to \{0,1\}^*$ $\quad C(w_1 \ldots w_n) = C(w_1) \ldots C(w_n)$

<u>Опр.</u> Код C однозначно декодир., если $\forall\, w_1 \neq w_2 \in A^*$ $\quad C(w_1) \neq C(w_2)$

$$\sum_{i=1}^{k} p_i \, |C(a_i)| \to \min$$

$\{a, b, c\}$

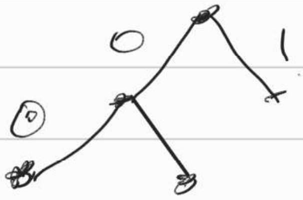
$C(a) = 00$

$C(b) = 01$

$C(c) = 1$

0	0
1	0
1	

Код префиксный, если $\forall\, i \neq j$ $C(a_i)$ не явл. началом $C(a_j)$



<u>Нер-во Крафта</u> $\exists$ префиксный код с длинами символов $l_1, l_2, \ldots, l_k \iff \sum_{i=1}^{k} 2^{-l_i} \le 1$

<u>Д-во</u> ($\Longrightarrow$)

$p_i \ge 2^{-l_i}$

2^{-l_i}

$1 = \sum p_i \ge 2^{-l_i}$

($\Leftarrow$) $l_1 \le l_2 \le \dots \le l_k$

$$\underbrace{2^{-l_1}} \ge \underbrace{2^{-l_2}} \ge \dots \ge \underbrace{2^{-l_k}}$$

[ ][ ] [ ]]$_1$

0 [0; 1] 0

00 [0; 1/2] [1/2; 1] 01

[0; 1/4] ... [3/4; 1]

000

(нер-во Крафта)

<u>Лемма</u> Если $\exists$ однозначно декодир. код. с дл. $l_1, \dots, l_k$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} 2^{-l_i} \le 1$$

<u>Д-во</u> $0 \longrightarrow u$ $\quad C: A \to \{u, v\}^*$

$1 \longrightarrow v$

$$f(u,v) = \left(\underbrace{C(a_1)} + \underbrace{C(a_2)} + \dots + \underbrace{C(a_k)}\right)^n$$

$$u = v = \frac{1}{2}$$

$$f(1/2, 1/2) = \left(\sum_{i=1}^{k} 2^{-l_i}\right)^n$$

$$\sum_{j=1}^{B\cdot n} \left(\begin{matrix}\text{сумма} \\ \text{значений} \\ \text{для слов} \\ \text{длины } j\end{matrix}\right) \le 1 \qquad \max|C(a_i)| = B$$

$$b = n$$

$$b \cdot n \geq \left(\sum_{i=1}^{k} 2^{-l_i} \right)^n \quad \forall n$$

$$\sum 2^{-l_i} \leq 1$$

<u>Теорема</u> (Шенон) $A = \{a_1, \dots, a_k\}$, $p_1 \dots p_k$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$

$\forall$ однозн. дек. кода $C: A \to \{0,1\}^*$

(1) $$\sum p_i |C(a_i)| \geq \sum_{i=1}^{k} p_i \log \frac{1}{p_i} = H(p_1, \dots, p_k)$$

(2) $\exists$ префиксный код C!

$$\sum_{i=1}^{k} p_i |C(a_i)| < H(p_1, \dots, p_k) + 1$$

<u>Д-во</u> $|C(a_i)| = l_i$

По нер-ву Крафта $\sum 2^{-l_i} \leq 1$

$$\sum p_i \log \frac{1}{p_i} - \sum p_i \log \frac{1}{2^{l_i}} =$$

$$= \sum p_i \log \frac{2^{-l_i}}{p_i} \le \log\left(\sum p_i \frac{2^{-l_i}}{p_i}\right)$$

$$\le \log\left(\sum 2^{-l_i}\right) \le 0.$$

(2) $l_i \approx \log \frac{1}{p_i}$

$$l_i = \left\lceil \log \frac{1}{p_i} \right\rceil$$

$$2^{-l_i} \le p_i$$

$$\sum 2^{-l_i} \le 1$$

$\exists$ префиксный код C с длинами символов $l_1, l_2, \ldots, l_k$

- $\sum p_i |C(a_i)| = \sum p_i \left\lceil \log \frac{1}{p_i} \right\rceil$

$$\sum p_i \left\lceil \log \frac{1}{p_i} \right\rceil - \sum p_i \log \frac{1}{p_i} =$$

$$= \sum p_i \underbrace{\left(\left\lceil \log \frac{1}{p_i} \right\rceil - \log \frac{1}{p_i}\right)}_{< 1} < 1$$

Код Хафмена

$\underline{\text{Б}}$ a_1 a_2
$\quad$ 0 $\quad$ 1

П. $p_1 \ge p_2 \ge \ldots \ge p_k \ge p_{k+1}$

$p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, p_k + p_{k+1}$

$a_k \to 0$ $\quad a_{k+1} \to 1$

Код Шенона – Фано

$$p_1 \geq p_2 \ldots \geq p_n$$

p_1 — 0 — 0

p_2 — 1

…

p_n — 1

$$H(p_1, \ldots, p_n) + O(1)$$

Блочное кодирование

$p_1 \ldots p_n$ $\quad X$

$$A = \{a_1, \ldots, a_k\}$$

$$A^n \qquad P[a_{i_1} \ldots a_{i_n}] = p_{i_1} \ldots p_{i_n}$$

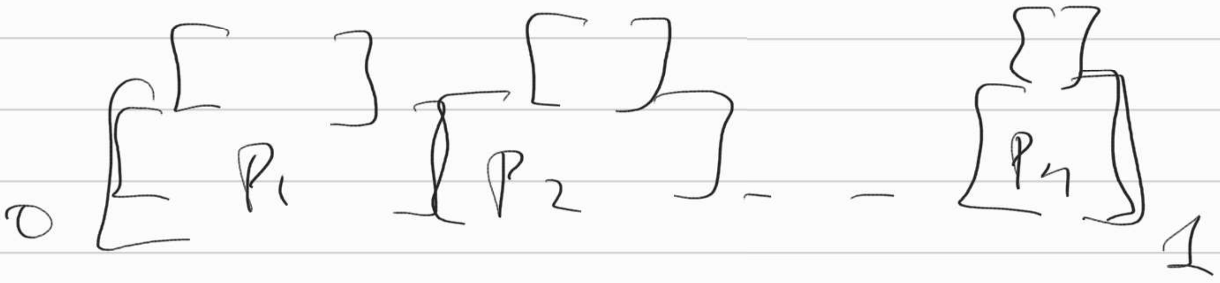
$$H(X^n) =$$

$$\leq \frac{n \cdot H(x) + b}{n}$$

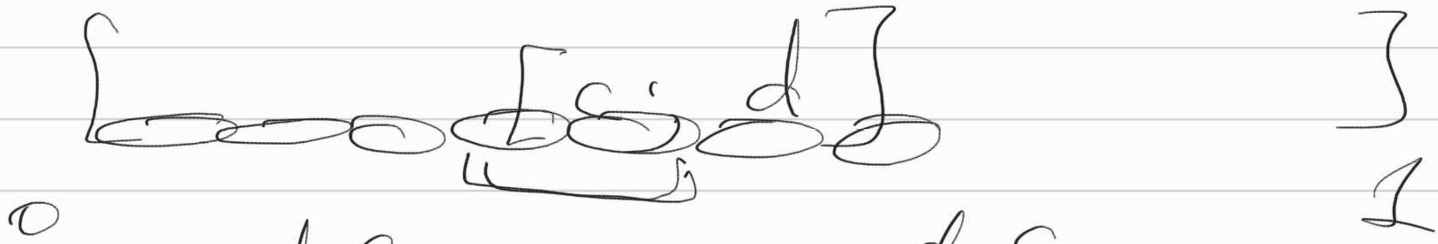
$$= H(X) + \frac{b}{n} \to 0$$

Арифметическое кодирование

$p_1, \; p_2 \ldots p_n$

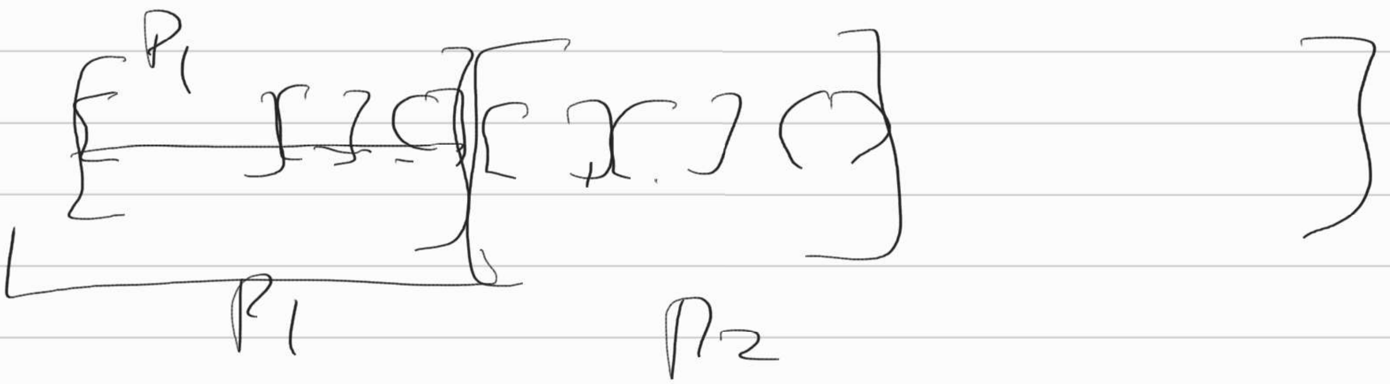


$[0.a0;\ 0.a1]$



$$\frac{d-c}{4} < 2^{-k} \le \frac{d-c}{2}$$

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_k) + 2$$



$a_1 a_k \quad a_1 a_2 \quad a_1 a_n$