Теория представлений симметрических групп

Лекция 1. Кокстеровские образующие, граф Юнга, диаграммы Браттели, базис Гельфанда–Цетлина

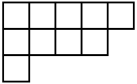
Н. В. Цилевич

3 сентября 2021 г.

Симметрическая группа

- $\mathfrak{S}_n$ — симметрическая группа порядка n.
- $Z(n) = Z[\mathfrak{S}_n]$ — центр её групповой алгебры.
- Π_n — множество разбиений числа $n \in \mathbb{N}$:
  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$, $\sum \lambda_i = n$;
  изображаются в виде диаграмм Юнга.

  Пример. $\lambda = (5, 4, 1) \in \Pi_{10}$.

- Цикловая запись $\sigma \in \mathfrak{S}_n$: произведение дизъюнктных циклов.
- $\mathfrak{S}_n \ni \sigma \mapsto \rho(\sigma) = (\ell_1, \ell_2, \ldots) \in \Pi_n$, где $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \ldots$ — длины циклов в цикловой записи, — цикловый тип перестановки.
- Цикловый тип единицы? транспозиции?

Классы сопряжённости

- σ_1, σ_2 сопряжены в $\mathfrak{S}_n \iff \rho(\sigma_1) = \rho(\sigma_2)$.
- Классы сопряжённости: $C_\mu := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \rho(\sigma) = \mu\}$, $\mu \in \Pi_n$.
- $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \ni f_\mu = \sum\limits_{\sigma \in C_\mu} \sigma$ — характеристические функции классов сопряжённости.
- Функциональная запись: $f_\mu(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \in C_\mu, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$
- $\{f_\mu\}_{\mu \in \Pi_n}$ — базис $Z(n)$.

Образующие Коксетера

- Транспозиция: $(i, j) \in \mathfrak{S}_n$.
- Кокстеровские транспозиции: $s_i = (i, i+1)$, $i = 1, \ldots, n-1$.
- Соотношения:

$$\begin{gathered} s_i^2 = e, \\ s_i s_j = s_j s_i \text{ при } |i - j| > 1, \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}. \end{gathered}$$

- Кокстеровская длина $\ell(\sigma)$ — наименьшее такое k, что $\sigma = s_{i_1} \ldots s_{i_k}$.

- Инверсия $\sigma \in \mathfrak{S}_n$: пара (i,j): $i < j$, $\sigma(i) > \sigma(j)$; $I(\sigma)$ — множество инверсий; $\mathrm{inv}(\sigma) = \#I(\sigma)$ — число инверсий.

Лемма (кокстеровская длина)

$\ell(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma)$.

Лемма (кокстеровская длина)

$\ell(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma)$.

Доказательство.

- $$\ell(\sigma s_i) = \begin{cases} \mathrm{inv}(\sigma) - 1, & \text{если } (i, i+1) \in I(\sigma), \\ \mathrm{inv}(\sigma) + 1, & \text{если } (i, i+1) \notin I(\sigma). \end{cases}$$
- $\ell(\sigma) \geq \mathrm{inv}(\sigma)$: если $\sigma = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ — кратчайшее представление, то $\mathrm{inv}(\sigma) \leq \mathrm{inv}(s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}}) + 1 \leq \mathrm{inv}(s_{i_1} \dots s_{i_{k-2}}) + 2 \leq \dots \leq k$.
- $\ell(\sigma) \leq \mathrm{inv}(\sigma)$.
  - Пусть $j := \sigma(n)$ и $\sigma_n := \sigma s_j s_{j+1} \dots s_{n-1}$.
  - Тогда $\sigma_n(n) = n$ и $\mathrm{inv}(\sigma_n) = \mathrm{inv}(\sigma) - (n - j)$, так как $\sigma = \sigma_n s_{n-1} \dots s_j$ и $\mathrm{inv}(\sigma_n s_{n-1}) = \mathrm{inv}(\sigma_n) + 1$, $\mathrm{inv}(\sigma_n s_{n-1} s_{n-2}) = \mathrm{inv}(\sigma_n s_{n-1}) + 1 =$ $= \mathrm{inv}(\sigma_n) + 2, \dots, \mathrm{inv}(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma_n) + (n - j)$.
  - $n - j =$ в точности число инверсий, образуемых n.
  - Далее индукция.

Лемма (кокстеровская длина)

$\ell(\sigma) = \mathrm{inv}(\sigma)$.

Следствие

$\{s_i\}$ — *образующие* $\mathfrak{S}_n$.

Стандартные таблицы Юнга и допустимые транспозиции

- Стандартная таблица Юнга формы $\lambda \in \Pi_n$: заполнение λ числами $1, \ldots, n$, возрастающее по строкам и столбцам.

  Пример. Стандартная таблица формы $\lambda = (5, 4, 1)$:

1	2	4	7	8
3	5	6	9	
10				

  $\mathrm{SYT}(\lambda)$ — множество стандартных таблиц формы λ;
  $\mathrm{SYT}(n)$ — множество стандартных таблиц размера n.
- Действие $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ на таблицах: $T \mapsto \sigma T$, заменяем i на $\sigma(i)$. Может получиться нестандартная таблица!
- s_i допустима для $T \iff s_i T$ стандартная ($\iff$ i и $i+1$ — в разных строках и разных столбцах).
- Допустимые и недопустимые транспозиции в примере выше?

- $\lambda \in \Pi_n \rightsquigarrow$ старшая таблица $T_\lambda^{\max} \in \mathrm{SYT}(\lambda)$ формы λ: заполняем последовательно по строкам.

  Пример. $T_{(5,4,1)}^{\max} =$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10				

- $T \in \mathrm{SYT}(\lambda) \rightsquigarrow \sigma_T \in \mathfrak{S}_n$: $T = \sigma_T T_\lambda^{\max}$.
- (★) Найти σ_T для

1	2	4	7	8
3	5	6	9	
10				

Лемма (о допустимых транспозициях)

$T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$, $\ell = \ell(\sigma_T) \implies \exists$ *последовательность из* ℓ *допустимых транспозиций, переводящая* T *в* $T_\lambda^{\max}$.

Доказательство. Индукция по n.

- $j :=$ число в правой клетке последней строки.
- Если $j = n$, удалим эту клетку $\rightsquigarrow T' \in \mathrm{SYT}(\lambda')$ и $\sigma_T = \sigma_{T'} \implies$ по предп. инд. $\exists$ последовательность $\ell(\sigma_{T'}) = \ell$ допустимых транспозиций: $T' \mapsto T_{\lambda'}^{\max} \implies$ та же последовательность переводит $T \mapsto T_\lambda^{\max}$.
- Если $j < n$, то s_j допустима для T, s_{j+1} допустима для $s_j T$, ..., s_{n-1} допустима для $s_{n-2} \dots s_j T$. Обозначим $S := s_{n-1} \dots s_j T$. Тогда
  - $\ell(s_j T) = \ell(T) - 1, \dots, \ell(S) = \ell(T) - (n - j - 1)$.
  - S содержит n в последней клетке

  $\implies$ свели к разобранному случаю.

Лемма (о допустимых транспозициях)

$T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$, $\ell = \ell(\sigma_T) \implies \exists$ *последовательность из* ℓ *допустимых транспозиций, переводящая* T *в* $T_\lambda^{\max}$.

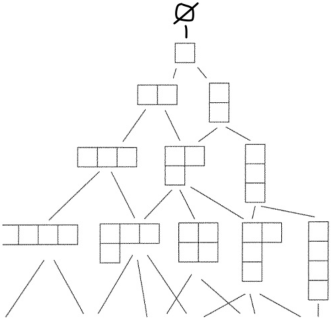
- В доказательстве описана канонической процедура разложения σ_T в произведение $\ell(\sigma_T)$ допустимых транспозиций.

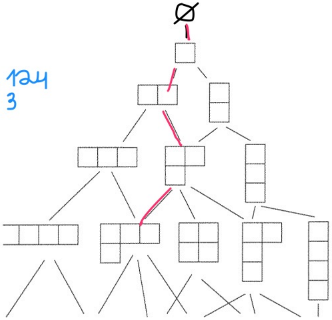
Следствие

Любые $S, T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$ *можно получить друг из друга последовательностью допустимых транспозиций.*

Граф Юнга

- Градуированный граф: $V = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} V_n$, $V_0 = \{\emptyset\}$, ребра соединяют вершины соседних этажей (от меньшего к большему).
- Граф Юнга $\mathbb{Y}$:
  - $V_n = \Pi_n$,
  - $\mu \in \Pi_{n-1}$ соединена с $\lambda \in \Pi_n$ $\iff$ $\mu \subset \lambda$ $\iff$ λ получается из μ добавлением одной клетки (обозначение: $\mu \nearrow \lambda$).





- Путь в графе Юнга длины n: последовательность $\emptyset = \lambda_0 \nearrow \lambda_1 \nearrow \ldots \nearrow \lambda_n = \lambda \in \Pi_n$;
  $\mathbb{T}(n)$ — множество путей длины n;
  $\mathbb{T}(\lambda)$ — множество путей из $\emptyset$ в λ.
- Очевидны биекции $\mathbb{T}(n) \leftrightarrow \mathrm{SYT}(n)$, $\mathbb{T}(\lambda) \leftrightarrow \mathrm{SYT}(\lambda)$.

Диаграммы Браттели

- Индуктивная цепочка (конечных) групп: $\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$.
- $\widehat{G}_n$ — множество классов эквивалентности конечномерных неприводимых комплексных представлений G_n;
- $\widehat{G}_n \ni \lambda \rightsquigarrow \pi_\lambda, V^\lambda$ — соответствующее неприводимое представление и его пространство.

Определение

Диаграмма Браттели *индуктивной цепочки групп = (мульти)граф ветвления (неприводимых представлений) этой цепочки:*

- $V_n = \widehat{G}_n$;
- $\mu \in \widehat{G}_{n-1}$ *и* $\lambda \in \widehat{G}_n$ *соединены* k *рёбрами* $\iff$ *кратность* π_μ *в* $\mathrm{Res}^{G_n}_{G_{n-1}} \pi_\lambda$ *равна* k.

Обозначения:

- $\mu \nearrow \lambda \iff \mu, \lambda$ — вершины соседних уровней, соединённые ребром;
- $\mu \subset \lambda \iff \mu \in \widehat{G}_k$, $\lambda \in \widehat{G}_n$, где $k \le n$, и $\exists$ путь в диаграмме Браттели из μ в $\lambda \iff$ кратность π_μ в $\mathrm{Res}^{G_n}_{G_k} \pi_\lambda$ больше нуля.

Определение

*Индуктивная цепочка — **с простым ветвлением** $\iff$ все кратности $(\pi_\mu, \mathrm{Res}^{G_n}_{G_{n-1}} \pi_\lambda)$ равны 0 или 1.*

Далее мы рассматриваем только цепочки с простым ветвлением!

Базис Гельфанда–Цетлина

- Простое ветвление $\implies$ для $\lambda \in \widehat{G}_n$ имеем каноническое разложение $V^\lambda = \bigoplus\limits_{\mu \in \widehat{G}_{n-1},\, \mu \nearrow \lambda} V^\mu$.
- Проитерируем $\implies$ $V^\lambda = \bigoplus\limits_T V_T$, где V_T — одномерные представления $G_1 = \{e\}$, а T пробегает всевозможные цепочки $T = \{\emptyset \nearrow \lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \ldots \nearrow \lambda_n = \lambda\}$, где $\lambda_i \in \widehat{G}_i$ (т.е. пути в диаграмме Браттели до λ).
- Выберем единичный (относительно G_n-инвариантного скалярного произведения в V^λ) вектор $v_T \in V_T \rightsquigarrow$ базис $\{v_T\}$ в V^λ.

Определение

$\{v_T\}$ — **базис Гельфанда–Цетлина** *индуктивной цепочки.*

- Определён канонически с точностью до скаляров.
- $(\star)$ $\mathbb{C}[G_i]v_T = V^{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$.