Теория представлений симметрических групп

Лекция 2. Алгебра Гельфанда–Цетлина. Необходимые сведения из теории представлений ассоциативных алгебр

Н. В. Цилевич

10 сентября 2021 г.

Базис Гельфанда–Цетлина (напоминание)

- Простое ветвление $\Longrightarrow$ для $\lambda \in \widehat{G}_n$ имеем каноническое разложение $V^\lambda = \bigoplus\limits_{\mu \in \widehat{G}_{n-1},\, \mu \nearrow \lambda} V^\mu$.
- Проитерируем $\Longrightarrow$ $V^\lambda = \bigoplus\limits_T V_T$, где V_T — одномерные представления $G_1 = \{e\}$, а T пробегает всевозможные цепочки $T = \{\emptyset \nearrow \lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \ldots \nearrow \lambda_n = \lambda\}$, где $\lambda_i \in \widehat{G}_i$ (т.е. пути в диаграмме Браттели до λ).
- Выберем единичный (относительно G_n-инвариантного скалярного произведения в V^λ) вектор $v_T \in V_T \rightsquigarrow$ базис $\{v_T\}$ в V^λ.

Определение

$\{v_T\}$ — **базис Гельфанда–Цетлина** *индуктивной цепочки.*

- Определён канонически с точностью до скаляров.
- ($\star$) $\mathbb{C}[G_i]v_T = V^{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

- Какие элементы $\mathbb{C}[G_n]$ действуют диагонально в базисе ГЦ, т.е. в любом неприводимом представлении G_n?

- Какие элементы $\mathbb{C}[G_n]$ действуют диагонально в базисе ГЦ, т.е. в любом неприводимом представлении G_n?
- Теорема Машке: $\mathbb{C}[G_n] \simeq \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}_n} \mathrm{End}(V^\lambda)$.

  Преобразование Фурье $\mathcal{F} : \mathbb{C}[G_n] \ni g \mapsto \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}_n} \pi_\lambda(g)$.
- $D(V^\lambda) := \{$операторы в V^λ, диагональные в базисе ГЦ$\}$,
- $D := \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}_n} D(V^\lambda)$.
- $\mathcal{F}^{-1}(D) = ?$

Алгебра Гельфанда–Цетлина

- Обозначим через Z_n центр $\mathbb{C}[G_n]$.

Определение

$\mathrm{GZ}(n) := \langle Z_1, \dots, Z_n \rangle \subset \mathbb{C}[G_n]$ – **алгебра Гельфанда–Цетлина** *индуктивной цепочки.*

- $\mathrm{GZ}(n)$ — коммутативная алгебра (почему?).

Теорема

- $\mathcal{F}(\mathrm{GZ}(n)) = D$, *т.е.* $\mathrm{GZ}(n)$ *состоит из всех элементов* $\mathbb{C}[G_n]$, *диагональных в базисе ГЦ в любом неприводимом представлении.*
- *В частности,* $\mathrm{GZ}(n)$ — *максимальная коммутативная подалгебра в* $\mathbb{C}[G_n]$ *и*
- $\dim \mathrm{GZ}(n) = \sum_{\lambda \in \widehat{G}_n} \dim \lambda$, *где* $\dim \lambda := \dim \pi_\lambda$.

Доказательство теоремы

- Центральный идемпотент $P_{\lambda_i} \in Z_i$, соответствующий π_{λ_i}:

$$P_{\lambda_i} := \frac{\dim \lambda_i}{|G_i|} \sum_{g \in G_i} \chi_{\lambda_i}(g) \cdot g^{-1}.$$

- $(\star)$ $\mathcal{F}(P_{\lambda_i})$ — ортогональный проектор на $\mathrm{End}(V^{\lambda_i})$. (Подсказка: коммутирует с $\mathbb{C}[G_i] \implies$ скалярный $\implies$ посчитать след.)
- $T = \{\emptyset \nearrow \lambda_1 \nearrow \lambda_2 \nearrow \ldots \nearrow \lambda_n = \lambda\} \rightsquigarrow P_T := P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \ldots P_{\lambda_n}$; $P_{\lambda_i} \in Z(i) \implies P_T \in \mathrm{GZ}(n)$.
- $\mathcal{F}(P_T) =$ проектор на v_T в V^λ (и 0 в остальных V^μ).
- $\implies \mathcal{F}(\mathrm{GZ}(n)) \supset D$.
- D — максимальная коммутативная подалгебра в $\bigoplus\limits_{\lambda \in \widehat{G}_n} \mathrm{End}(V^\lambda)$

  $\implies \mathcal{F}(\mathrm{GZ}(n)) = D$, так как $\mathcal{F}(\mathrm{GZ}(n))$ коммутативна.

Алгебра и базис Гельфанда–Цетлина

- Вектор Гельфанда–Цетлина = элемент базиса ГЦ.
- Вектор ГЦ — собственный вектор для всех элементов $\mathrm{GZ}(n)$.

Следствие

Пусть $\lambda \in \widehat{G}_n$. Если $v \in V^\lambda$ — с.в. для всех элементов $\mathrm{GZ}(n)$, то v — вектор ГЦ (с точностью до скаляра).

Итого, векторы ГЦ — это в точности собственные векторы всех элементов $\mathrm{GZ}(n)$.

Следствие

Пусть u, v — векторы ГЦ. Если их собственные числа для всех элементов $\mathrm{GZ}(n)$ совпадают, то $u = v$.

- (★) Доказать оба следствия.
- Позже найдём явный набор образующих $\mathrm{GZ}(n)$.

Представления ассоциативных алгебр

Везде далее A — алгебра над алгебраически замкнутым полем k.

- Представление ассоциативной алгебры A (гомоморфизм $\varrho\colon A \to \operatorname{End} V$), подпредставление, прямая сумма представлений, факторпредставление, регулярное представление.
- Неприводимое представление.
- Сплетающий оператор (гомоморфизм), изоморфизм представлений; $\operatorname{Hom}_A(V_1, V_2)$ — пространство сплетающих операторов $V_1 \to V_2$.

Лемма (лемма Шура для алгебраически замкнутых полей)

$$V_1, V_2 \text{ *неприводимы* } \implies \operatorname{Hom}_A(V_1, V_2) = \begin{cases} 0, & V_1 \not\simeq V_2, \\ \{\lambda \cdot \mathrm{Id}, \lambda \in k\}, & V_1 \simeq V_2. \end{cases}$$

Следствие

A коммутативная $\implies$ все неприводимые представления одномерны.

Вполне приводимые представления

- Вполне приводимое представление = прямая сумма неприводимых.
- **Пример.** V — неприводимое, $\dim V = n$, $Y := \operatorname{End} V$.
  - A действует на Y левым умножением.
  - Y вполне приводимо, $Y \simeq nV$; изоморфизм $\phi\colon \operatorname{End}(V) \to nV$: $\phi(x) = (xv_1, \ldots, xv_n)$, где $\{v_i\}$ — базис V.
- (★) V вполне приводимо, $\dim V < \infty \implies$ каноническое отождествление

$$V \simeq \bigoplus_{X-\text{неприв.}} X \otimes \operatorname{Hom}_A(X, V).$$

(Подсказка: изоморфизм $x \otimes T \mapsto Tx$; для неприводимых — по лемме Шура, для остальных — «аддитивность».)

Лемма (о подпредставлениях вполне приводимого представления)

- V_i, $i = 1, \ldots, m$, — *попарно неизоморфные конечномерные неприводимые,*
- W — *подпредставление в* $V = \bigoplus n_i V_i$.

Тогда

- $W \simeq \bigoplus r_i V_i$, $r_i \leqslant n_i$,
- *вложение* $\phi\colon W \to V$ *есть* $\bigoplus \phi_i$, *где* $\phi_i\colon r_i V_i \to n_i V_i$ *имеет вид*

$$\phi_i(v_1, \ldots, v_{r_i}) = (v_1, \ldots, v_{r_i}) X_i,$$

где X_i — *матрица размера* $r_i \times n_i$ *с линейно независимыми строками.*

Доказательство

- Индукция по $n = \sum n_i$. <u>База</u> $n = 1$ очевидна.
- <u>Переход.</u> $W \neq 0 \implies \exists$ неприв. $P \subset W$ ($\star$) . Зафиксируем P.
- По лемме Шура $P \simeq V_i$ и вложение $\phi|_P \colon P \to V$ имеет вид $v \mapsto (c_1 v, \ldots, c_{n_i} v)$, где не все $c_j \in k$ равны 0.
- $G_i := \mathrm{GL}_{n_i}(k)$ действует на $n_i V_i$ как $(v_1, \ldots, v_{n_i}) \mapsto (v_1, \ldots, v_{n_i}) g_i$ (и тождественно на $n_j V_j$, $j \neq i$), коммутируя с действием A, $\implies$ действует и на подпредставлениях в V.
- При этом нужное свойство сохраняется: под действием $g_i \in G_i$ имеем $X_i \rightsquigarrow X_i g_i$, а X_j, $j \neq i$, не меняются.
- Возьмём $g_i \in G_i$: $(c_1, \ldots, c_{n_i}) g_i = (1, 0, \ldots, 0)$.
- $W g_i \supset P g_i =$ первое слагаемое в $n_i V_i \implies W = V_i \oplus W'$, где $W' \subset n_1 V_1 \oplus \ldots \oplus (n_i - 1) V_i \oplus \ldots \oplus n_m V_m$.
- QED по индукционному предположению.

Следствие

V — неприводимое, $\dim V < \infty$, $v_1, \ldots, v_n \in V$ лин. незав. Тогда для любых $w_1, \ldots, w_n \in V$ существует $a \in A$: $av_i = w_i$ для всех i.

Доказательство.

- Пусть нет. Рассмотрим $f : A \to nV$, задаваемое формулой $a \mapsto (av_1, \ldots, av_n) \implies \operatorname{Im} f$ — собственное подпредставление в V.
- По лемме $\operatorname{Im} f \simeq rV$, $r < n$, и вложение $\phi : \operatorname{Im} f \to nV$ задаётся некоторой $(r \times n)$-матрицей X.
- Подставим $a = e \implies \exists u_1, \ldots, u_r \in V$: $(u_1, \ldots, u_r)X = (v_1, \ldots, v_n)$.
- Выберем $(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$: $X(c_1, \ldots, c_n)^T = 0$ ($\exists$, так как $r < n$).
- $\sum c_i v_i = (u_1, \ldots, u_r)X(c_1, \ldots, c_n)^T = 0$, противоречие.

Теорема (теорема плотности)

1. (V,ρ) — *неприводимое,* $\dim V < \infty \implies \rho\colon A \to \operatorname{End} V$ *сюръективно.*
2. $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$, (V_i, ρ_i) — *попарно неизоморфные конечномерные неприводимые* $\implies \bigoplus \rho_i\colon A \to \bigoplus \operatorname{End} V_i$ *сюръективно.*

Теорема (теорема плотности)

1. (V, ρ) — *неприводимое*, $\dim V < \infty \implies \rho\colon A \to \operatorname{End} V$ *сюръективно.*
2. $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$, (V_i, ρ_i) — *попарно неизоморфные конечномерные неприводимые* $\implies \bigoplus \rho_i\colon A \to \bigoplus \operatorname{End} V_i$ *сюръективно.*

Доказательство.

- 1. $B := \operatorname{Im} \rho \subset \operatorname{End} V$. Хотим: $B = \operatorname{End} V$.
  - Пусть $\{v_i\}$ — базис в V.
  - Пусть $C \in \operatorname{End} V$ и $w_i = Cv_i$. По следствию $\exists a \in A$: $av_i = w_i \implies \rho(a) = C \implies C \in B$.

Теорема (теорема плотности)

1. (V, ρ) — *неприводимое,* $\dim V < \infty \implies \rho\colon A \to \operatorname{End} V$ *сюръективно.*
2. $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$, (V_i, ρ_i) — *попарно неизоморфные конечномерные неприводимые* $\implies \bigoplus \rho_i\colon A \to \bigoplus \operatorname{End} V_i$ *сюръективно.*

- 1. $B := \operatorname{Im} \rho \subset \operatorname{End} V$. Хотим: $B = \operatorname{End} V$.
  - Пусть $\{v_i\}$ — базис в V.
  - Пусть $C \in \operatorname{End} V$ и $w_i = Cv_i$. По следствию $\exists a \in A$: $av_i = w_i \implies \rho(a) = C \implies C \in B$.
- 2. Пусть $B_i := \operatorname{Im} \rho_i \subset \operatorname{End} V_i$, $B := \operatorname{Im}(\bigoplus \rho_i) \subset \bigoplus \operatorname{End} V_i$.
  - Было: $\bigoplus \operatorname{End} V_i \simeq \bigoplus d_i V_i$, где $d_i = \dim V_i$. По лемме $\operatorname{Im} \rho_i \simeq V_i \hookrightarrow d_i V_i$ есть $v_i \mapsto v_i X_i$, где X_i — матрица $1 \times d_i$. Тогда $(\bigoplus \rho_i)(\bigoplus v_i) = \bigoplus v_i X_i$
  - Таким образом, $B = \bigoplus B_i$.
  - По предыдущему пункту $B_i = \operatorname{End} V_i \implies$ QED.

Двойственные представления

- Противоположная алгебра A^{op} — то же векторное пространство, но $a * b = ba$.
- ($\bigstar$) V — представление $A \rightsquigarrow$ двойственное представление V^* алгебры A^{op}, где

$$(\rho^*(a)(\phi))(v) := \phi(\rho(a)(v)),$$

  $a \in A^{\mathrm{op}} = A$, $v \in V$, $\phi \in V^*$.
- ($\bigstar$) $(\mathrm{Mat}_{d_i}(k))^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{Mat}_{d_i}(k)$ (изоморфизм $X \mapsto X^T$).

Теорема (представления прямых сумм матричных алгебр)

Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Mat}_{d_i}(k)$*. Тогда*

- *неприводимые представления* A *имеют вид* $V_1 = k^{d_1}, \ldots, V_r = k^{d_r}$,
- *произвольное конечномерное представление есть прямая сумма их копий (т.е. вполне приводимо).*

Доказательство.

- V_i неприводимо ($\forall v \neq 0, w \in V_i$ существует $a \in A : av = w$).
- X — представление $A \implies X^*$ — представление A^{op}, а значит, и представление A, так как $A \simeq A^{\mathrm{op}}$.
- Если $\dim X = n$, пусть $y_1, \ldots, y_n$ — базис в X^* и зададим $\phi\colon nA \to X^*$ формулой $\phi(a_1, \ldots, a_n) = a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n$.
- ϕ сюръективно (т.к. $k \subset A$) $\implies \phi^*\colon X \to nA^*$ инъективно.
- $nA^* \simeq nA$ как представления A ($\bigstar$) $\implies \mathrm{Im}\,\phi^* \simeq X$ — подпредставление в nA.
- $\mathrm{Mat}_{d_i}(k) \simeq d_i V_i \implies A \simeq \bigoplus d_i V_i \implies nA \simeq \bigoplus n d_i V_i \implies X \simeq \bigoplus m_i V_i$.