Теория представлений симметрических групп

Лекция 3. Представления полупростых алгебр. Простота ветвления цепочки симметрических групп

Н. В. Цилевич

17 сентября 2021 г.

- Пусть V — представление A. (Конечная) фильтрация V — это последовательность подпредставлений $0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_n = V$.

Лемма (о фильтрациях)

V — представление A, $\dim V < \infty \implies \exists$ конечная фильтрация, для которой все V_i/V_{i-1} неприводимы.

Доказательство.

- Индукция по $\dim V$. База $\dim V = 1$ очевидна.
- Переход. Возьмём неприводимое $V_1 \subset V$, рассмотрим $U := V/V_1$ и каноническую проекцию $\pi : V \to U$.
- По инд. предп. $\exists$ фильтрация $0 = U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_{n-1} = U$, где U_i/U_{i-1} неприводимы.
- $V_i := \pi^{-1}(U_{i-1})$, $i \geqslant 2$, даёт искомую фильтрацию, так как $\pi^{-1}(U_{i-1})/\pi^{-1}(U_{i-2}) \simeq U_{i-1}/U_{i-2}$.

Радикал

- Радикал $\mathrm{Rad}(A) =$ множество элементов, действующих нулём во всех неприводимых представлениях.
- ($\star$) $\boxed{\mathrm{Rad}(A)\text{ — двусторонний идеал.}}$
- I — нильпотентный идеал $\iff$ $I^n = 0$ для некоторого n.

Лемма (о радикале)

A — конечномерная алгебра $\implies$ $\mathrm{Rad}(A)$ — максимальный нильпотентный двусторонний идеал в A.

Доказательство леммы

- I — нильпотентный двусторонний идеал $\implies I \subset \mathrm{Rad}(A)$.
  - V — неприводимое, $v \in V \implies Iv \subset V$ — подпредставление.
  - Если $Iv \neq 0$, то $Iv = V \implies \exists x \in I\colon xv = v \implies x^n v = v \implies$ $\implies x^n \neq 0$, противоречие.
  - Значит, $Iv = 0 \implies I \subset \mathrm{Rad}(A)$.
- $\mathrm{Rad}(A)$ нильпотентный.
  - Пусть $0 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = A$ — фильтрация регулярного представления A, где A_{i+1}/A_i неприводимы.
  - $x \in \mathrm{Rad}(A) \implies x$ действует на A_{i+1}/A_i нулём $\implies xA_{i+1} \subset A_i$ $\implies x^n A = 0 \implies \mathrm{Rad}(A)^n = 0$.

Теорема (о неприводимых представлениях конечномерной алгебры)

Пусть A — конечномерная алгебра. Тогда

- *A имеет лишь конечное число различных неприводимых представлений V_i.*
- $\dim V_i < \infty$.
- $A/\operatorname{Rad}(A) \simeq \bigoplus\limits_i \operatorname{End} V_i$.

Доказательство.

- V неприводимо, $0 \neq v \in V \implies Av \subset V$ — конечномерное подпредставление, $Av \neq 0 \implies Av = V \implies \dim V < \infty$.
- $V_1, \dots, V_r$ — неизоморфные неприводимые $\implies$ гомоморфизм $\bigoplus_i \rho_i \colon A \to \bigoplus_i \operatorname{End} V_i$ сюръективен $\implies$ $r \leqslant \sum_i \dim(\operatorname{End} V_i) \leqslant \dim A$.
- $V_1, \dots, V_r$ — все неизоморфные неприводимые $\implies$ гомоморфизм $\bigoplus_i \rho_i \colon A \to \bigoplus_i \operatorname{End} V_i$ сюръективен, а его ядро по определению есть $\operatorname{Rad}(A) \implies$ QED.

Полупростые алгебры

- Конечномерная алгебра A полупроста $\iff \mathrm{Rad}(A) = 0$.

Теорема (об эквивалентных условиях полупростоты)

A — конечномерная алгебра $\implies$ следующие условия эквивалентны:

(1) *A полупроста;*

(2) $\sum\limits_i (\dim V_i)^2 = \dim A$, *где V_i — все неприводимые представления;*

(3) $A \simeq \bigoplus\limits_i \mathrm{Mat}_{d_i}(k)$ *для некоторых d_i (теорема Веддербёрна–Артина);*

(4) *любое конечномерное представление A вполне приводимо;*

(5) *A — вполне приводимое представление A.*

- (★) Прямая сумма полупростых алгебр полупроста; гомоморфный образ полупростой алгебры полупрост.

Доказательство теоремы

- (1) $\iff$ (2): $\dim A - \dim \mathrm{Rad}(A) = \sum_i (\dim V_i)^2$. Таким образом, $\dim A = \sum_i (\dim V_i)^2 \iff \mathrm{Rad}(A) = 0$.
- (1) $\implies$ (3): $\mathrm{Rad}(A) = 0 \implies A \simeq \bigoplus \mathrm{End}\, V_i \simeq \bigoplus_i \mathrm{Mat}_{d_i}(k)$, где $d_i = \dim V_i$.
- (3) $\implies$ (4) по теореме о представлениях матричных алгебр.
- (4) $\implies$ (5) очевидно.
- (5) $\implies$ (1): A — вполне приводимое представление $\implies$ $\mathrm{Rad}(A)$ действует на A нулём. Но нулём на $e \in A$ действует только 0 $\implies$ $\mathrm{Rad}(A) = 0$.

Доказательство теоремы

- (1) $\iff$ (2): $\dim A - \dim \mathrm{Rad}(A) = \sum_i (\dim V_i)^2$. Таким образом, $\dim A = \sum_i (\dim V_i)^2 \iff \mathrm{Rad}(A) = 0$.
- (1) $\implies$ (3): $\mathrm{Rad}(A) = 0 \implies A \simeq \bigoplus \mathrm{End}\, V_i \simeq \bigoplus_i \mathrm{Mat}_{d_i}(k)$, где $d_i = \dim V_i$.
- (3) $\implies$ (4) по теореме о представлениях матричных алгебр.
- (4) $\implies$ (5) очевидно.
- (5) $\implies$ (1): A — вполне приводимое представление $\implies$ $\mathrm{Rad}(A)$ действует на A нулём. Но нулём на $e \in A$ действует только 0 $\implies$ $\mathrm{Rad}(A) = 0$.

Следствие (★)

Пусть A — полупростая алгебра. Все её неприводимые представления одномерны $\iff$ A коммутативна.

Теорема о двойном централизаторе

- $N \subset M$ — две алгебры $\implies$ централизатор N в M есть $Z(M, N) := \{m \in M\colon mn = nm$ для любого $n \in N\}$.
- Если M ясно из контекста, обозначаем просто N'.

Теорема о двойном централизаторе

- $N \subset M$ — две алгебры $\implies$ централизатор N в M есть $Z(M,N) := \{m \in M \colon mn = nm \text{ для любого } n \in N\}$.
- Если M ясно из контекста, обозначаем просто N'.
- Ясно: $N'' \supset N$. Верно ли, что $N'' = N$? Вообще говоря, нет, но иногда да.

Теорема о двойном централизаторе

- $N \subset M$ — две алгебры $\implies$ централизатор N в M есть $Z(M, N) := \{m \in M \colon mn = nm$ для любого $n \in N\}$.
- Если M ясно из контекста, обозначаем просто N'.

Теорема (теорема о двойном централизаторе)

E — конечномерное векторное пространство,
A, B — подалгебры в $\mathrm{End}(E)$, A полупроста, $B = A'$.
Тогда

(1) *$A = B'$ (т.е. $A'' = A$);*

(2) *B полупроста;*

(3) *как представление $A \otimes B$ имеем $E = \bigoplus_{i \in I} V_i \otimes W_i$, где V_i — все неприводимые представления A, а W_i — все неприводимые представления B. (В частности, между ними существует естественная биекция.)*

Доказательство теоремы

- A полупроста $\implies$ $E = \bigoplus_{i \in I} V_i \otimes W_i$, где $W_i := \mathrm{Hom}_A(V_i, E)$, и $A = \bigoplus_i \mathrm{End}(V_i)$.
- Действие A на E точно $\implies$ $W_i \neq 0$.
- По лемме Шура $B = A'$ отождествляется с $\bigoplus_i \mathrm{End}(W_i)$.
- Отсюда всё следует:
  - по лемме Шура $B' \simeq \bigoplus_i \mathrm{End}(V_i) = A$;
  - B полупроста как сумма матричных алгебр;
  - W_i — все её неприводимые представления по теореме о сумме матричных алгебр.

Простота ветвления

Хотим: цепочка симметрических групп имеет простое ветвление.

Теорема (критерий простоты ветвления)

Пусть M — полупростая конечномерная $\mathbb{C}$-алгебра, N — её полупростая подалгебра. Тогда

(1) *централизатор $Z(M, N)$ полупрост;*

(2) *следующие утверждения равносильны:*

- *$Z(M, N)$ коммутативен;*
- *для любого конечномерного неприводимого $\mathbb{C}$-представления ρ алгебры M ограничение $\rho|_N$ не имеет кратностей.*

Доказательство теоремы

- Теорема Веддербёрна–Артина: $M = \bigoplus_{i=1}^{k} M_i$, где $M_i = \mathrm{Mat}_{d_i}(\mathbb{C})$.
- Пусть $\pi_i :=$ естественная проекция $M \to M_i$ и $N_i := \pi_i(N) \implies N_i$ полупроста как гомоморфный образ полупростой.
- $Z(M, N) = \bigoplus_i Z(M_i, N_i)$.
- $Z(M_i, N_i)$ полупрост по теореме о двойном централизаторе $\implies Z(M, N)$ полупроста.

Продолжение доказательства

- $V_i := \mathbb{C}^{d_i}$ (первый столбец из $\mathrm{Mat}_{d_i}(\mathbb{C})$) $\implies$ $V_1, \ldots, V_k$ — все неизоморфные неприводимые представления M.
- Разложение V_i на неприводимые представления N = разложение V_i на неприводимые представления N_i.
- Теорема о двойном централизаторе (кто есть кто?): $V_i = \bigoplus\limits_j X_j \otimes Y_j$, где X_j — неприводимые представления N_i, а Y_j — неприводимые представления $Z(M_i, N_i)$.
- $V_i|_{N_i}$ не имеет кратностей для любого i
  $\iff$ все неприводимые представления $Z(M_i, N_i)$ одномерны $\forall i$
  $\iff$ $Z(M_i, N_i)$ коммутативен для любого i
  $\iff$ $Z(M, N)$ коммутативен.

- $Z(n-1,1) := Z(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n-1}])$.

Теорема

$Z(n-1,1)$ *коммутативен.*

Следствие

Индуктивная цепочка симметрических групп имеет простое ветвление!

Ликбез: алгебры с инволюцией

- Алгебра A с инволюцией *: $(x^*)^* = x$, $(x+y)^* = x^* + y^*$, $(xy)^* = y^* x^*$, $(\alpha x^*) = \bar{\alpha} x^*$.
- $x \in A$ нормальный $\iff xx^* = x^* x$.
- $x \in A$ самосопряжённый $\iff x^* = x$.
- A — $\mathbb{R}$-алгебра с инволюцией $\rightsquigarrow$ её *-комплексификация $A^{\mathbb{C}}$: $A^{\mathbb{C}} = \{(x, y)(= x + iy),\ x, y \in A\}$ с естественными операциями и $(x + iy)^* = x^* - iy^*$.
- $x \in A^{\mathbb{C}}$ вещественный $\iff x = x + i0$, $x \in A$.
- x вещественный $\implies x^*$ в A и $A^{\mathbb{C}}$ совпадают.
- **Пример (★) :** групповая алгебра конечной группы G. Инволюция: $(\sum\limits_i a_i g_i)^* = \sum\limits_i \bar{a}_i g_i^{-1}$. При этом $(\mathbb{R}[G])^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}[G]$.

Теорема

A — $\mathbb{C}$-алгебра с инволюцией.

(1) *$x \in A$ нормальный $\iff$ $x = y + iz$, где $y, z \in A$ самосопряжённые и коммутируют.*

(2) *A коммутативна $\iff$ любой $x \in A$ нормален.*

(3) *Пусть $A = B^{\mathbb{C}}$, где B — $\mathbb{R}$-алгебра с инволюцией. Если любой вещественный элемент A самосопряжён, то A коммутативна.*

Доказательство.

- (1), $\Leftarrow$: $xx^* = (y+iz)(y^* - iz^*) = yy^* + zz^* + izy^* - iyz^* = y^2 + z^2$, аналогично $x^*x = y^2 + z^2 \implies$ QED.
- (1), $\Rightarrow$: $y := \frac{1}{2}(x + x^*)$, $z := \frac{1}{2i}(x - x^*) \implies x = y + iz$, y, z самосопряжены, $yz = \frac{1}{4i}(x^2 - xx^* + x^*x - (x^*)^2) = \frac{1}{4i}(x^2 - (x^*)^2)$ и аналогично $zy = \frac{1}{4i}(x^2 - (x^*)^2)$.

Продолжение доказательства

- (2), $\Rightarrow$: очевидно.
- (2), $\Leftarrow$: Пусть любой элемент $x \in A$ нормален.
  - Любые два самосопряжённых элемента коммутируют.
    Действительно, $y, z \in A$ самосопряжены $\implies$
    $(y + iz)(y^* - iz^*) = y^2 + z^2 + i(zy - yz)$,
    $(y^* - iz^*)(y + iz) = y^2 + z^2 + i(yz - zy)$
    $\implies$ $yz = zy$ в силу нормальности.
  - $x_1, x_2 \in A \implies$ по п. 1 $x_1 = y_1 + iz_1$, $x_2 = y_2 + iz_2$, где y_1, y_2, z_1, z_2 самосопряжены и, следовательно, коммутируют $\implies$
    $x_1 x_2 = (y_1 y_2 - z_1 z_2) + i(z_1 y_2 + y_1 z_2) = x_2 x_1$.

Продолжение доказательства

- (2), $\Rightarrow$: очевидно.
- (2), $\Leftarrow$: Пусть любой элемент $x \in A$ нормален.
  - Любые два самосопряжённых элемента коммутируют.
    Действительно, $y, z \in A$ самосопряжены $\implies$
    $(y + iz)(y^* - iz^*) = y^2 + z^2 + i(zy - yz)$,
    $(y^* - iz^*)(y + iz) = y^2 + z^2 + i(yz - zy)$
    $\implies$ $yz = zy$ в силу нормальности.
  - $x_1, x_2 \in A \implies$ по п. 1 $x_1 = y_1 + iz_1$, $x_2 = y_2 + iz_2$, где y_1, y_2, z_1, z_2 самосопряжены и, следовательно, коммутируют $\implies$
    $x_1x_2 = (y_1y_2 - z_1z_2) + i(z_1y_2 + y_1z_2) = x_2x_1$.
- (3): Пусть $A = B^{\mathbb{C}}$ и любой вещ. элемент A самосопряжён.
  - y, z вещественные $\implies$ yz вещественный и $yz = (yz)^* = z^*y^* = zy$.
  - $x \in A \implies x = y + iz$, где y, z вещественные.
  - x нормален по п. (1).
  - A коммутативна по п. (2).

Лемма

Любая перестановка $g \in \mathfrak{S}_n$ сопряжена с g^{-1}, причём элементом из $\mathfrak{S}_{n-1}$, т.е. $\exists h \in \mathfrak{S}_{n-1}\colon\ g^{-1} = hgh^{-1}$.

Доказательство.

- Пусть $g = C_1 \dots C_\ell$ — разложение на непересекающиеся циклы.
- Достаточно доказать для каждого цикла отдельно (действие на дизъюнктных множествах).
- Для циклов, не содержащих n, — очевидно.
- $C = (a_1, \dots, a_k, n) \implies C^{-1} = (n, a_k, \dots, a_1) = (a_k, \dots, a_1, n)$.
- Искомый сопрягающий элемент:

$$h = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k \\ a_k & \dots & a_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_{n-1}.$$

Теорема

$Z(n-1,1)$ *коммутативен.*

Доказательство.

- Пусть $Z^{\mathbb{R}}(n-1,1) := Z(\mathbb{R}[\mathfrak{S}_n], \mathbb{R}[\mathfrak{S}_{n-1}])$.
- $Z(n-1,1) = (Z^{\mathbb{R}}(n-1,1))^{\mathbb{C}} \implies$ достаточно доказать, что любой элемент $a \in Z^{\mathbb{R}}(n-1,1)$ самосопряжён.
- Пусть $a = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_\sigma \cdot \sigma \in Z^{\mathbb{R}}(n-1,1) \implies a_\sigma \in \mathbb{R}$.
- Фиксируем $g \in \mathfrak{S}_n$ и $h \in \mathfrak{S}_{n-1}$: $g^{-1} = h^{-1}gh$.
- $ah = ha \implies a = hah^{-1} = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_\sigma \cdot h\sigma h^{-1} = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{h^{-1}\sigma h} \cdot \sigma$.
- При $\sigma = g$ имеем $h\sigma h^{-1} = g^{-1} \implies a_g = a_{g^{-1}}$.
- Таким образом, $a_g = a_{g^{-1}}$ для любой $g \in \mathfrak{S}_n \implies a = a^*$.

Промежуточный итог

Индуктивная цепочка симметрических групп имеет простое ветвление!

Итого:

- Для симметрических групп корректно определен базис Гельфанда–Цетлина $\{v_T\}$.
- Рассмотрим алгебру Гельфанда–Цетлина $\mathrm{GZ}(n) = \langle Z(1), \dots, Z(n) \rangle \subset \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, где $Z(k)$ — центр $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]$.
- Это максимальная коммутативная подалгебра в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, которая состоит из всех элементов, диагональных в базисе ГЦ в любом неприводимом представлении.
- Вектор ГЦ однозначно определяется собственными числами на нём всех элементов $\mathrm{GZ}(n)$.

Ближайшая цель: ввести мультипликативные образующие $\mathrm{GZ}(n)$.