Теория представлений симметрических групп

Лекция 4. Элементы Юнга–Юциса–Мэрфи

Н. В. Цилевич

24 сентября 2021 г.

Элементы Юнга–Юциса–Мэрфи

Определение

Элементы Юнга–Юциса–Мэрфи (YJM):
$X_i = (1i) + (2i) + \ldots + (i-1, i) \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

- **Примеры:** $X_1 = 0$; $X_2 = (12)$, $X_3 = (13) + (23)$,$\ldots$.

Элементы Юнга–Юциса–Мэрфи

Определение

Элементы Юнга–Юциса–Мэрфи (YJM):
$X_i = (1i) + (2i) + \ldots + (i-1, i) \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

- **Примеры:** $X_1 = 0$; $X_2 = (12)$, $X_3 = (13) + (23), \ldots$.

Простейшие свойства:

- $X_i =$ сумма всех трансп. в $\mathfrak{S}_i$ $-$ сумма всех трансп. в $\mathfrak{S}_{i-1}$ $=$ элемент $Z(i)$ минус элемент $Z(i-1)$;
- $X_i \notin Z(i)$;
- $X_i \in \mathrm{GZ}(i) \subset \mathrm{GZ}(n)$ – элемент алгебры Гельфанда–Цетлина;
- все X_i коммутируют.

Элементы Юнга–Юциса–Мэрфи

Определение

Элементы Юнга–Юциса–Мэрфи (YJM):
$X_i = (1i) + (2i) + \ldots + (i-1, i) \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

- **Примеры:** $X_1 = 0$; $X_2 = (12)$, $X_3 = (13) + (23), \ldots$.

Простейшие свойства:

- $X_i =$ сумма всех трансп. в $\mathfrak{S}_i$ − сумма всех трансп. в $\mathfrak{S}_{i-1}$ $=$ элемент $Z(i)$ минус элемент $Z(i-1)$;
- $X_i \notin Z(i)$;
- $X_i \in \mathrm{GZ}(i) \subset \mathrm{GZ}(n)$ – элемент алгебры Гельфанда–Цетлина;
- все X_i коммутируют.

Теорема (YJM-элементы порождают алгебру Гельфанда–Цетлина)

$\boxed{\mathrm{GZ}(n) = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle}$.

Сначала разберёмся, как устроен централизатор. Нужны обобщения характеристических функций классов смежности.

- Пусть $\mu \vdash n$ и i – часть $\mu \rightsquigarrow$
  $c_{(\mu,i)} :=$ сумма перестановок типа μ, где $n \in$ циклу длины i.

Лемма

$c_{(\mu,i)}$ – базис $Z(n-1,1)$.

Сначала разберёмся, как устроен централизатор. Нужны обобщения характеристических функций классов смежности.

- Пусть $\mu \vdash n$ и i – часть $\mu \rightsquigarrow$
  $c_{(\mu,i)} :=$ сумма перестановок типа μ, где $n \in$ циклу длины i.

Лемма

$c_{(\mu,i)}$ – базис $Z(n-1,1)$.

Доказательство:

- $c_{(\mu,i)}$ инвариантны относительно сопряжения элементами $\mathfrak{S}_{n-1}$ $\implies$ лежат в $Z(n-1,1)$.
- Любой элемент, инвариантный относительно сопряжения элементами $\mathfrak{S}_{n-1}$, раскладывается по $c_{(\mu,i)}$.
- Линейная независимость очевидна.

Сначала разберёмся, как устроен централизатор. Нужны обобщения характеристических функций классов смежности.

- Пусть $\mu \vdash n$ и i – часть $\mu \rightsquigarrow$ $c_{(\mu,i)} :=$ сумма перестановок типа μ, где $n \in$ циклу длины i.

Лемма

$c_{(\mu,i)}$ – базис $Z(n-1,1)$.

Доказательство:

- $c_{(\mu,i)}$ инвариантны относительно сопряжения элементами $\mathfrak{S}_{n-1}$ $\Longrightarrow$ лежат в $Z(n-1,1)$.
- Любой элемент, инвариантный относительно сопряжения элементами $\mathfrak{S}_{n-1}$, раскладывается по $c_{(\mu,i)}$.
- Линейная независимость очевидна.

Обозначим $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

Рассмотрим следующие элементы:

- $Y_i :=$ сумма всех i-циклов в $\mathfrak{S}_{n-1}$.
- $Y_i' :=$ сумма всех i-циклов в $\mathfrak{S}_n$, содержащих n.
- Y_i, Y_i' совпадают с $c_{(\mu,j)}$ для подходящих μ и j (а именно?).
- **Следствие:** $\langle Y_1, \ldots, Y_{n-1}, Y_2', \ldots, Y_n' \rangle \subset Z(n-1, 1)$.

Рассмотрим следующие элементы:

- $Y_i :=$ сумма всех i-циклов в $\mathfrak{S}_{n-1}$.
- $Y_i' :=$ сумма всех i-циклов в $\mathfrak{S}_n$, содержащих n.
- Y_i, Y_i' совпадают с $c_{(\mu,j)}$ для подходящих μ и j (а именно?).
- **Следствие:** $\langle Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_2', \dots, Y_n' \rangle \subset Z(n-1,1)$.

Хотим: $Z(n-1,1) = \langle Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_2', \dots, Y_n' \rangle$, т.е. что $c_{(\mu,j)}$ выражаются через Y_i и Y_i'.

Рассмотрим следующие элементы:

- $Y_i :=$ сумма всех i-циклов в $\mathfrak{S}_{n-1}$.
- $Y'_i :=$ сумма всех i-циклов в $\mathfrak{S}_n$, содержащих n.
- Y_i, Y'_i совпадают с $c_{(\mu,j)}$ для подходящих μ и j (а именно?).
- **Следствие:** $\langle Y_1, \ldots, Y_{n-1}, Y'_2, \ldots, Y'_n \rangle \subset Z(n-1,1)$.

Хотим: $Z(n-1,1) = \langle Y_1, \ldots, Y_{n-1}, Y'_2, \ldots, Y'_n \rangle$, т.е. что $c_{(\mu,j)}$ выражаются через Y_i и Y'_i.

- $\#'(\mu)$: = сумма неединичных частей μ = размер подмножества, на котором перестановка типа μ действует нетривиально.
- Если σ – типа λ, а τ – типа μ, то $\sigma\tau$ – типа ν, где $\#'(\nu) \leq \#'(\lambda \cup \mu)$, причём равенство – только если $\nu = \lambda \cup \mu$.
- $\#'(\mu) = 0 \implies \mu = (1^n) \implies c_{(\mu,1)} = e = Y_1$;
  $\#'(\mu) = 1$ не бывает.

Лемма

При $\#'(\mu) \geqslant 2$ имеем $c_{(\mu,i)} \in \langle Y_1, \dots, Y_k, Y'_2, \dots, Y'_k \rangle$, где $k = \#'(\mu)$.

Доказательство. Индукция по $\#'(\mu)$.

- База $\#'(\mu) = 2 \implies c_{(\mu,1)} = Y_2$, $c_{(\mu,2)} = Y'_2 \implies$ OK.
- Переход $k \mapsto k+1$. Пусть $\#'(\mu) = k+1$ и неединичные части μ равны $\mu_1, \dots, \mu_\ell$.
  - Случай $i = 1 \implies Y_{\mu_1} \dots Y_{\mu_\ell} = \alpha_{(\mu,1)} \cdot c_{(\mu,1)} + \sum_{(\nu,1)} \alpha_{(\nu,1)} c_{(\nu,1)}$, где $\alpha_{(\mu,1)} \neq 0$ и сумма по ν с $\#'(\nu) < \#'(\mu) \implies$ QED по предположению индукции.
  - Случай $i > 1$. Не умаляя общности, $i = \mu_1 \implies$ $Y'_{\mu_1} Y_{\mu_2} \dots Y_{\mu_\ell} = \alpha_{(\mu,i)} \cdot c_{(\mu,i)} + \sum_{(\nu,j)} \alpha_{(\nu,j)} c_{(\nu,j)}$, где $\alpha_{(\mu,i)} \neq 0$ и сумма по ν с $\#'(\nu) < \#'(\mu) \implies$ QED по предположению индукции.

Лемма

При $\#'(\mu) \geqslant 2$ *имеем* $c_{(\mu,i)} \in \langle Y_1, \ldots, Y_k, Y'_2, \ldots, Y'_k \rangle$, *где* $k = \#'(\mu)$.

Следствие

(1) $Z(n-1,1) = \langle Y_1, \ldots, Y_{n-1}, Y'_2, \ldots, Y'_n \rangle$.

(2) $Z(n-1) = \langle Y_1, \ldots, Y_{n-1} \rangle$.

Предложение

$Z(n-1,1) = \langle Z(n-1), X_n \rangle;$

Доказательство.

- $X_n = Y_2' \implies \langle Z(n-1), X_n \rangle \subset Z(n-1,1)$.
- Докажем обратное включение. Достаточно: $Y_k' \in \langle Z(n-1), X_n \rangle$ при $k = 2, \ldots, n$. Индукция по k.
- База: $Y_2' = X_n \in \langle Z(n-1), X_n \rangle$.

Переход. Пусть $Y'_2, \ldots, Y'_{k+1} \in \langle Z(n-1), X_n \rangle$. Докажем, что $Y'_{k+2} \in \langle Z(n-1), X_n \rangle$.

- $Y'_{k+1} = \sum_{i_1,\ldots,i_k} (i_1, \ldots, i_k, n)$, где $i_1, \ldots, i_k \in [n-1]$ различны.
- $Y'_{k+1} X_n = \sum_{i_1,\ldots,i_k} (i_1, \ldots, i_k, n) \sum_{i=1}^{n-1} (i, n) \in \langle Z(n-1), X_n \rangle$.
- Типичный элемент произведения: $(i_1, \ldots, i_k, n)(i, n)$.
  - Если $i \neq i_j$, то он равен $(i, i_1, \ldots, i_k, n)$.
  - Если $i = i_j$, то он равен $(i_1, \ldots, i_j)(i_{j+1}, \ldots, i_k, n)$.
- Отсюда $Y'_{k+1} X_n =$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i,i_1,\ldots,i_k} (i, i_1, \ldots, i_k, n) + \sum_{i_1,\ldots,i_k} \sum_{j=1}^{k} (i_1, \ldots, i_j)(i_{j+1}, \ldots, i_k, n) \\ &= Y'_{k+2} + \sum_{(\mu,i):\, \#'(\mu) \leqslant k+1} \alpha_{(\mu,i)} c_{(\mu,i)}. \end{aligned}$$

- По предположению индукции и лемме $Y'_{k+2} \in \langle Z(n-1), X_n \rangle$.

Теперь можем доказать нашу теорему.

Теорема (YJM-элементы порождают алгебру Гельфанда–Цетлина)

$\boxed{\mathrm{GZ}(n) = \langle X_1, X_2, \ldots, X_n \rangle}.$

Доказательство.

- Индукция по n. База $n = 1$ и $n = 2$ очевидна.
- Переход. Пусть $\mathrm{GZ}(n-1) = \langle X_1, X_2, \ldots, X_{n-1} \rangle$. Достаточно показать, что $\mathrm{GZ}(n) = \langle \mathrm{GZ}(n-1), X_n \rangle$.
  - Включение $\supset$ очевидно.
  - Для обратного включения достаточно: $Z(n) \subset \langle \mathrm{GZ}(n-1), X_n \rangle$. Но $Z(n) \subset Z(n-1, 1) \implies$ QED по предложению.

Теорема доказана!

Лемма

$X_2 \dots X_n$ = сумма всех n-циклов в $\mathfrak{S}_n$.

Доказательство. Индукция по n.

- <u>База</u> $n = 1$ очевидна.
- <u>Переход</u>. Фиксируем $(n-1)$-цикл $C = (c_1, \dots, c_{n-1}) \in \mathfrak{S}_{n-1}$.

  Тогда $CX_n = \sum_{j=1}^{n-1} (c_1, \dots, c_{n-1})(j, n) = \sum_{j=1}^{n-1} (c'_1, \dots, c'_{n-2}, j)(j, n) =$

  $= \sum_{j=1}^{n-1} (c'_1, \dots, c'_{n-2}, n, j) =$ сумма n-циклов.

  Ясно, что в итоговую сумму каждый n-цикл войдёт ровно один раз (почему?).

Промежуточный итог и ближайшие планы

- Ещё раз доказали, что $Z(n-1,1)$ коммутативен, а значит, цепочка симметрических групп имеет простое ветвление.
- Алгебра Гельфанда–Цетлина $\mathrm{GZ}(n)$ – максимальная коммутативная подалгебра в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$.
- YJM-элементы – мультипликативные образующие $\mathrm{GZ}(n)$.
- В каждом неприводимом представлении $\mathfrak{S}_n$ задан базис Гельфанда–Цетлина, состоящий из общих собственных векторов $\mathrm{GZ}(n)$ (и, в частности, YJM-элементов).
- В контексте симметрических групп базис ГЦ называется также базисом Юнга, а его элементы – векторами Юнга.

Ближайшая цель: изучить спектр YJM-элементов!

Веса и спектр

- Вектор Юнга $v \mapsto$ вес $\alpha(v) = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, где a_i – собственное число X_i на v, т.е. $X_i v = a_i v$.
- **Замечания:**
  - $a_1 = 0$;
  - $\alpha(v)$ задаёт v с точностью до скалярного множителя: $\alpha \mapsto v_\alpha$.
- $\mathrm{Spec}(n) := \{\alpha(v) : v \text{ – вектор Юнга}\}$.

  Тогда $\# \mathrm{Spec}(n) = \dim \mathrm{GZ}(n) = \sum\limits_{\lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_n} \dim \lambda.$

Веса и спектр

- Вектор Юнга $v \mapsto$ вес $\alpha(v) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, где a_i – собственное число X_i на v, т.е. $X_i v = a_i v$.
- **Замечания:**
  - $a_1 = 0$;
  - $\alpha(v)$ задаёт v с точностью до скалярного множителя: $\alpha \mapsto v_\alpha$.
- Spec(n):$= \{\alpha(v) : v$ – вектор Юнга$\}$.

  Тогда $\# \operatorname{Spec}(n) = \dim \operatorname{GZ}(n) = \sum\limits_{\lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_n} \dim \lambda$.
- Имеет место биекция

$$\operatorname{Spec}(n) \leftrightarrow \{\text{пути в диаграмме Браттели длины } n\} :$$

  - путь $T \mapsto \alpha(v_T) \in \operatorname{Spec}(n)$;
  - вес $\operatorname{Spec}(n) \ni \alpha \mapsto$ путь T_α, где $v_\alpha = v_{T_\alpha}$.

Отношение эквивалентности на $\mathrm{Spec}(n)$

- Отношение эквивалентности на $\mathrm{Spec}(n)$: $\alpha \sim \beta \iff$ $\iff$ v_α и v_β лежат в одном неприводимом представлении $\iff$ $\iff$ T_α и T_β заканчиваются в одной вершине.
- $\boxed{\#(\mathrm{Spec}(n)/\sim) = \#\hat{\mathfrak{S}}_n = \#\Pi_n = p(n)}$.

Таким образом, $(\mathrm{Spec}(n), \sim)$ полностью описывает структуру графа ветвления неприводимых представлений:

- вершины n-го этажа есть классы эквивалентности $(\mathrm{Spec}(n), \sim)$;
- ребро соединяет две вершины, если существует элемент, принадлежащий соответствующим классам.