Теория представлений симметрических групп

Лекция 5. Веса и спектр

Н. В. Цилевич

1 октября 2021 г.

Веса и спектр

- Вектор Юнга $v \mapsto$ вес $\alpha(v) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, где a_i – собственное число X_i на v, т.е. $X_i v = a_i v$.
- **Замечания:**
  - $a_1 = 0$;
  - $\alpha(v)$ задаёт v с точностью до скалярного множителя: $\alpha \mapsto v_\alpha$.
- Spec(n):= $\{\alpha(v) : v$ – вектор Юнга$\}$.

  Тогда $\# \operatorname{Spec}(n) = \dim \mathrm{GZ}(n) = \sum_{\lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_n} \dim \lambda$.

Веса и спектр

- Вектор Юнга $v \mapsto$ вес $\alpha(v) = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, где a_i – собственное число X_i на v, т.е. $X_i v = a_i v$.
- **Замечания:**
  - $a_1 = 0$;
  - $\alpha(v)$ задаёт v с точностью до скалярного множителя: $\alpha \mapsto v_\alpha$.
- Spec(n):$= \{\alpha(v) : v$ – вектор Юнга$\}$.

  Тогда $\# \operatorname{Spec}(n) = \dim \operatorname{GZ}(n) = \sum_{\lambda \in \hat{\mathfrak{S}}_n} \dim \lambda$.
- Имеет место биекция

$$\operatorname{Spec}(n) \leftrightarrow \{\text{пути в диаграмме Браттели длины } n\} :$$

  - путь $T \mapsto \alpha(v_T) \in \operatorname{Spec}(n)$;
  - вес $\operatorname{Spec}(n) \ni \alpha \mapsto$ путь T_α, где $v_\alpha = v_{T_\alpha}$.

Отношение эквивалентности на Spec(n)

- Отношение эквивалентности на Spec(n): $\alpha \sim \beta \iff$
  $\iff$ v_α и v_β лежат в одном неприводимом представлении $\iff$
  $\iff$ T_α и T_β заканчиваются в одной вершине.
- $\boxed{\#(\mathrm{Spec}(n)/\sim) = \#\hat{\mathfrak{S}}_n = \#\Pi_n = p(n)}$.

Отношение эквивалентности на $\mathrm{Spec}(n)$

- Отношение эквивалентности на $\mathrm{Spec}(n)$: $\alpha \sim \beta \iff$
  $\iff$ v_α и v_β лежат в одном неприводимом представлении $\iff$
  $\iff$ T_α и T_β заканчиваются в одной вершине.
- $\boxed{\#(\mathrm{Spec}(n)/\sim) = \#\hat{\mathfrak{S}}_n = \#\Pi_n = p(n)}$.

Таким образом, $\{(\mathrm{Spec}(n), \sim)\}_n$ полностью описывает структуру графа ветвления неприводимых представлений:

- вершины n-го этажа есть классы эквивалентности $(\mathrm{Spec}(n), \sim)$;
- ребро соединяет вершины $C' \in (\mathrm{Spec}(n-1), \sim)$ и $C'' \in (\mathrm{Spec}(n), \sim)$, если существует элемент $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in C''$, такой, что $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in C'$.

Отношение эквивалентности на $\mathrm{Spec}(n)$

- Отношение эквивалентности на $\mathrm{Spec}(n)$: $\alpha \sim \beta \iff$
  $\iff$ v_α и v_β лежат в одном неприводимом представлении $\iff$
  $\iff$ T_α и T_β заканчиваются в одной вершине.
- $\boxed{\#(\mathrm{Spec}(n)/\sim) = \#\hat{\mathfrak{S}}_n = \#\Pi_n = p(n)}$.

Таким образом, $\{(\mathrm{Spec}(n), \sim)\}_n$ полностью описывает структуру графа ветвления неприводимых представлений:

- вершины n-го этажа есть классы эквивалентности $(\mathrm{Spec}(n), \sim)$;
- ребро соединяет вершины $C' \in (\mathrm{Spec}(n-1), \sim)$ и $C'' \in (\mathrm{Spec}(n), \sim)$, если существует элемент $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in C''$, такой, что $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in C'$.

Итого, наш план: доказать, что $\{(\mathrm{Spec}(n), \sim)\}_n$ совпадает с $\{(\mathrm{SYT}(n), \approx)\}_n$, где $\approx$ – эквивалентность по форме таблиц. Это и будет означать, что граф ветвления неприводимых представлений симметрических групп совпадает с графом Юнга.

Локальность действия кокстеровских образующих

- А как в базисе Юнга действует вся симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$?
- Посмотрим на кокстеровские образующие s_k.
- Ключевой факт: действие кокстеровских образующих в базисе Юнга <u>локально</u>, т.е. <u>затрагивает только один этаж графа Юнга!</u>

Локальность действия кокстеровских образующих

Лемма

Действие кокстеровских образующих s_k в базисе Юнга локально, т.е. при $T = (\emptyset \nearrow \lambda_1 \nearrow \ldots \nearrow \lambda_n)$ и $k = 1, \ldots, n-1$

$$\pi_{\lambda_n}(s_k) v_T = \sum_{T'} c_{T'} v_{T'},$$

где сумма по $T' = (\emptyset \nearrow \lambda'_1 \nearrow \ldots \nearrow \lambda'_n)$, таким, что $\lambda'_i = \lambda_i$ при $i \neq k$.

Локальность действия кокстеровских образующих

Лемма

Действие кокстеровских образующих s_k в базисе Юнга локально, т.е. при $T = (\emptyset \nearrow \lambda_1 \nearrow \ldots \nearrow \lambda_n)$ и $k = 1, \ldots, n-1$

$$\pi_{\lambda_n}(s_k) v_T = \sum_{T'} c_{T'} v_{T'},$$

где сумма по $T' = (\emptyset \nearrow \lambda'_1 \nearrow \ldots \nearrow \lambda'_n)$, таким, что $\lambda'_i = \lambda_i$ при $i \neq k$.

Доказательство.

- Если $i \geqslant k+1$, то $s_k \in \mathfrak{S}_i \implies$
  $\implies \pi_{\lambda_n}(s_k) v_T \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_i] v_T = V^{\lambda_i} \implies \lambda'_i = \lambda_i$ в T'.
- Если $i \leqslant k-1$, то s_k коммутирует с $\mathfrak{S}_i \implies$ отображение $\pi_{\lambda_i}(a) v_T \mapsto \pi_{\lambda_i}(s_k) \pi_{\lambda_i}(a) v_T$ – изоморфизм представлений $\implies$ $\pi_{\lambda_i}(s_k) v_T \in V^{\lambda_i} \implies \lambda'_i = \lambda_i$ в T'.

Коммутационные соотношения

- Ну хорошо, действие локально. А поподробнее можно? Как насчёт явных формул?

Коммутационные соотношения

- Ну хорошо, действие локально. А поподробнее можно? Как насчёт явных формул?
- Можно!
- Для этого найдём коммутационные соотношения между s_i и X_j.

Лемма (коммутационные соотношения между s_i и X_j)

- $\boxed{s_i X_j = X_j s_i \text{ при } i \neq j-1, j}$.
- $\boxed{s_i X_i + e = X_{i+1} s_i}$
  $(\iff s_i X_i s_i + s_i = X_{i+1} \iff X_i s_i + e = s_i X_{i+1})$.

Коммутационные соотношения

Лемма (коммутационные соотношения между s_i и X_j)

- $\boxed{s_i X_j = X_j s_i \text{ при } i \neq j-1, j}$.
- $\boxed{s_i X_i + e = X_{i+1} s_i}$
  $(\iff s_i X_i s_i + s_i = X_{i+1} \iff X_i s_i + e = s_i X_{i+1})$.

Доказательство.

- Если $i \geqslant j+1$, то $s_i X_j = X_j s_i$, так как носители дизъюнктны.
- Если $i \leqslant j-1$, то недизъюнктны только
  $(i, i+1)[(i,j) + (i+1,j)] = (i, i+1, j) + (i, j, i+1) =$
  $= [(i,j) + (i+1,j)](i, i+1)$.
- П.ч. $= \left(\sum_{j=1}^{i} (j, i+1)\right) \cdot (i, i+1) = \sum_{j=1}^{i-1} (i, i+1, j) + e =$
  $= \sum_{j=1}^{i-1} (i, i+1)(i, j) + e = (i, i+1) \cdot \left(\sum_{j=1}^{i-1} (i, j)\right) + e =$ л.ч.

Далее всегда $T = (\emptyset \nearrow \lambda_1 \nearrow \ldots \nearrow \lambda_n)$.

Следствие

Пусть W – подпространство в $V^{\lambda_{k+1}}$, натянутое на v_T и $s_k v_T$ (очевидно, что $\dim W \leqslant 2$). Тогда W инвариантно относительно s_k, X_k, X_{k+1}.

Доказательство.

- Для действия на v_T – очевидно, так как v_T – собственный вектор X_k, X_{k+1}.
- $X_k(s_k v_T) = s_k X_{k+1} v_T - s_k v_T = c s_k v_T - s_k v_T \in W$,
  $X_{k+1}(s_k v_T) = s_k X_k v_T + v_T = c s_k v_T + v_T \in W$,
  $s_k(s_k v_T) = v_T \in W$.

Вырожденная аффинная алгебра Гекке

- Итак, имеем подпространство W, инвариантное относительно действия операторов s_k, X_k, X_{k+1}, которые удовлетворяют соотношениям

$$s_k^2 = e, \qquad X_k X_{k+1} = X_{k+1} X_k, \qquad s_k X_k + e = X_{k+1} s_k.$$

- А что это за соотношения такие? Не соответствуют ли они какой-то известной алгебре?

Вырожденная аффинная алгебра Гекке

- Итак, имеем подпространство W, инвариантное относительно действия операторов s_k, X_k, X_{k+1}, которые удовлетворяют соотношениям

$$s_k^2 = e, \qquad X_k X_{k+1} = X_{k+1} X_k, \qquad s_k X_k + e = X_{k+1} s_k.$$

- А что это за соотношения такие? Не соответствуют ли они какой-то известной алгебре?
- Есть такая алгебра!

Определение

Вырожденная аффинная алгебра Гекке $H(2)$ – *алгебра с образующими* H_1, H_2, s *и соотношениями*

$$s^2 = e, \qquad H_1 H_2 = H_2 H_1, \qquad sH_1 + e = H_2 s.$$

Представления аффинной алгебры Гекке $H(2)$

- Итого, у нас в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ сидит гомоморфный образ вырожденной аффинной алгебры Гекке $H(2)$.
- И что же мы можем сказать про эту алгебру? Особенно про её представления?

Представления аффинной алгебры Гекке $H(2)$

- Итого, у нас в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ сидит гомоморфный образ вырожденной аффинной алгебры Гекке $H(2)$.

Лемма

(1) *Все неприводимые представления $H(2)$ имеют $\dim \leqslant 2$.*

(2) *При $i = 1, \ldots, n-1$ рассмотрим гомоморфизм $H(2) \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$:*

$$s \mapsto s_i, \quad H_1 \mapsto X_i, \quad H_2 \mapsto X_{i+1}.$$

Обозначим его образ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ через $H_i(2)$.
Тогда $H_i(2)$ (= подалгебра в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, порождённая s_i, X_i, X_{i+1}) полупроста.

Доказательство леммы, часть (1)

Хотим: Все неприводимые представления $H(2)$ имеют $\dim \leqslant 2$.

- Пусть V – неприводимое представление $H(2)$; так как H_1 и H_2 коммутируют, они имеют общий собственный вектор $v \in V$.
- Пусть $W := \langle v, sv \rangle$. Тогда $\dim W \leqslant 2$.
- Коммутационные соотношения $\implies$ W инвариантно относительно $H(2)$.
- Значит, $W = V$ и $\dim V \leqslant 2$.

Лемма

Подалгебра $M \subset \mathrm{Mat}_N(\mathbb{C})$ замкнута относительно матричной инволюции ($B \mapsto \bar{B}^T$) $\implies$ M полупроста.

Доказательство.

- Если $a \in \mathrm{Rad}(A)$, то $e - a$ обратим.
  - Доказательство: $a \in \mathrm{Rad}(A) \implies a^n = 0 \implies$
    $\implies (e-a)(e+a+\ldots+a^{n-1}) = e - a^n = e.$
- Пусть $B \in M$, $B \neq 0$.
  Спектральный радиус $\varrho(B^*B) = \|B\|^2_{L^2 \mapsto L^2} > 0 \implies \exists \lambda \in \mathbb{C}$: матрица $E - \lambda B^*B$ не обратима $\implies \lambda B^*B \notin \mathrm{Rad}(M) \implies$
  $\implies B \notin \mathrm{Rad}(M)$.
- Таким образом, $\mathrm{Rad}(M) = 0$.

Доказательство леммы, часть (2)

Хотим: $H_i(2)$ ($=$ подалгебра в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, порождённая s_i, X_i, X_{i+1}) полупроста.

- Рассмотрим регулярное представление $\implies$ $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] \subset \mathrm{Mat}_{n!}(\mathbb{C})$.
- Транспозиция – вещественная симметричная матрица $\implies$ YJM-элементы тоже.
- Таким образом, алгебра $H_i(2)$ замкнута относительно матричной инволюции $\implies$ полупроста по лемме.

Итак, доказали:

Лемма

(1) *Все неприводимые представления* $H(2)$ *имеют* $\dim \leqslant 2$.

(2) *При* $i = 1, \ldots, n-1$ *рассмотрим гомоморфизм* $H(2) \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$:

$$s \mapsto s_i, \quad H_1 \mapsto X_i, \quad H_2 \mapsto X_{i+1}.$$

Обозначим его образ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ *через* $H_i(2)$.
Тогда $H_i(2)$ *(= подалгебра в* $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$*, порождённая* s_i, X_i, X_{i+1}*) — полупростая алгебра.*

Лемма

(1) *Все неприводимые представления $H(2)$ имеют* $\dim \leqslant 2$.

(2) *При $i = 1, \ldots, n-1$ рассмотрим гомоморфизм $H(2) \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$:*

$$s \mapsto s_i, \quad H_1 \mapsto X_i, \quad H_2 \mapsto X_{i+1}.$$

Обозначим его образ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ через $H_i(2)$.
Тогда $H_i(2)$ (= подалгебра в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, порождённая s_i, X_i, X_{i+1}) — полупростая алгебра.

Замечание. Пусть $\hat{H}(2) := H_{n-1}(2)$.
Тогда $\boxed{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] = \langle \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n-1}], \hat{H}(2) \rangle}$ (почему?).

Именно это будем использовать для индуктивного построения.

Лемма

(1) *Все неприводимые представления $H(2)$ имеют* $\dim \leqslant 2$.

(2) *При $i = 1, \ldots, n-1$ рассмотрим гомоморфизм $H(2) \to \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$:*

$$s \mapsto s_i, \quad H_1 \mapsto X_i, \quad H_2 \mapsto X_{i+1}.$$

Обозначим его образ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ через $H_i(2)$.
Тогда $H_i(2)$ (= подалгебра в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, порождённая s_i, X_i, X_{i+1}) — полупростая алгебра.

Замечание. Пусть $\hat{H}(2) := H_{n-1}(2)$.
Тогда $\boxed{\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] = \langle \mathbb{C}[\mathfrak{S}_{n-1}], \hat{H}(2) \rangle}$ (почему?).

Именно это будем использовать для индуктивного построения.

И теперь мы можем явно описать спектр $\mathrm{Spec}(n)$ и действие кокстеровских образующих в базисе Юнга в терминах преобразований весов!

Теорема (описание Spec(n) и действие s_i в базисе Юнга)

Пусть $T \in \mathbb{T}(n)$, $\alpha = \alpha(T) = (a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{Spec}(n)$, $v_\alpha = v_T$. *Тогда*

(1) $a_{i+1} \neq a_i$ *для любого* i.

(2) $a_{i+1} = a_i \pm 1 \iff s_i v_\alpha = \pm v_\alpha$.

(3) *При* $i = 1, \dots, n-2$ *не бывает* $a_i = a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ *и* $a_i = a_{i+1} - 1 = a_{i+2}$.

(4) *При* $a_{i+1} \neq a_i \pm 1$ *пусть* $\alpha' = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \dots, a_n)$. *Тогда* $\alpha' \in \mathrm{Spec}(n)$ *и* $\alpha' \sim \alpha$.
Пусть $v := (s_i - \frac{e}{a_{i+1} - a_i}) v_\alpha$. *Тогда* v *совпадает с* $v_{\alpha'}$ *(с точностью до константы) и в базисе* $\{v_\alpha, v\}$ *действие* $H_i(2)$ *задаётся матрицами*

$$X_i = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad X_{i+1} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad s_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{b-a} & 1 \\ 1 - \frac{1}{(b-a)^2} & -\frac{1}{b-a} \end{pmatrix},$$

где $a = a_i$, $b = a_{i+1}$.

Доказательство теоремы, часть (1)

Хотим: $a_{i+1} \neq a_i$ для любого i.

- Предположим, что v_α и $s_i v_\alpha$ линейно зависимы, т.е. $s_i v_\alpha = c v_\alpha$.
  Имеем: $s_i^2 = e \implies c^2 = 1 \implies s_i v_\alpha = \pm v_\alpha$.
  Но $s_i X_i s_i + s_i = X_{i+1} \implies a_{i+1} = a_i \pm 1$.

Доказательство теоремы, часть (1)

Хотим: $a_{i+1} \neq a_i$ для любого i.

- Предположим, что v_α и $s_i v_\alpha$ линейно зависимы, т.е. $s_i v_\alpha = c v_\alpha$.
  Имеем: $s_i^2 = e \implies c^2 = 1 \implies s_i v_\alpha = \pm v_\alpha$.
  Но $s_i X_i s_i + s_i = X_{i+1} \implies a_{i+1} = a_i \pm 1$.
- Предположим, что v_α и $s_i v_\alpha$ линейно независимы.
  Пусть $W = \langle v_\alpha, s_i v_\alpha \rangle \subset V^{\lambda_{i+1}}$. Доказано: W инвариантно относительно $H_i(2)$, действие в этом базисе имеет вид

$$X_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ -1 & a_{i+1} \end{pmatrix}, \quad X_{i+1} = \begin{pmatrix} a_{i+1} & 0 \\ 1 & a_i \end{pmatrix}, \quad s_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Действие X_i на $V^{\lambda_{i+1}}$ диагонализуемо, W инвариантно $\implies$ действие X_i на W диагонализуемо $\implies a_i \neq a_{i+1}$, так как матрица $\begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ не диагонализуема (★) .

Доказательство теоремы, части (2) и (3)

(2) Хотим: $a_{i+1} = a_i \pm 1 \iff s_i v_\alpha = \pm v_\alpha$.

- $\Leftarrow$ доказано выше.
- Докажем $\Rightarrow$. Пусть $a_{i+1} = a_i + 1$ (второй случай аналогичен). Пусть v_α и $s_i v_\alpha$ линейно независимы и $W = \langle v_\alpha, s_i v_\alpha \rangle \subset V^{\lambda_{i+1}}$. Доказано: W – представление $H_i(2)$, алгебра $H_i(2)$ полупроста. Но W содержит единственное $H_i(2)$-инвариантное одномерное подпространство $\langle s_i v_\alpha + v_\alpha \rangle$ ($\bigstar$) $\implies$ противоречие с полупростотой.
  Значит, v_α и $s_i v_\alpha$ линейно зависимы и $s_i v_\alpha = v_\alpha$.

Доказательство теоремы, части (2) и (3)

(2) Хотим: $a_{i+1} = a_i \pm 1 \iff s_i v_\alpha = \pm v_\alpha$.

- $\Leftarrow$ доказано выше.
- Докажем $\Rightarrow$. Пусть $a_{i+1} = a_i + 1$ (второй случай аналогичен). Пусть v_α и $s_i v_\alpha$ линейно независимы и $W = \langle v_\alpha, s_i v_\alpha \rangle \subset V^{\lambda_{i+1}}$. Доказано: W – представление $H_i(2)$, алгебра $H_i(2)$ полупроста. Но W содержит единственное $H_i(2)$-инвариантное одномерное подпространство $\langle s_i v_\alpha + v_\alpha \rangle$ ($\bigstar$) $\implies$ противоречие с полупростотой.
  Значит, v_α и $s_i v_\alpha$ линейно зависимы и $s_i v_\alpha = v_\alpha$.

(3) Хотим: не бывает $a_i = a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ и $a_i = a_{i+1} - 1 = a_{i+2}$.

- Пусть $a_i = a_{i+1} - 1 = a_{i+2}$ (второй случай аналогичен).
  По доказанному $s_i v_\alpha = v_\alpha$, $s_{i+1} v_\alpha = -v_\alpha$.
  Но $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$.
  Применим к $v_\alpha \implies -v_\alpha = v_\alpha$, противоречие.

Доказательство теоремы, часть (4)

Хотим:

- При $a_{i+1} \neq a_i \pm 1$ пусть $\alpha' = s_i\alpha$. Тогда $\alpha' \in \mathrm{Spec}(n)$ и $\alpha' \sim \alpha$.
- $v := (s_i - \frac{e}{a_{i+1}-a_i})v_\alpha \implies v = cv_{\alpha'}$ плюс формулы для действия.

Доказательство:

- По доказанному v_α и $s_i v_\alpha$ линейно независимы.
- При $j \neq i, i+1$ имеем $X_j s_i = s_i X_j \implies X_j v = a_j v$.
  Далее, $X_i v = X_i s_i v_\alpha - \frac{1}{a_{i+1}-a_i} X_i v_\alpha = s_i X_{i+1} v_\alpha - v_\alpha - \frac{a_i}{a_{i+1}-a_i} v_\alpha =$
  $= a_{i+1} s_i v_\alpha - \frac{a_{i+1}}{a_{i+1}-a_i} v_\alpha = a_{i+1} v$.
  Аналогично $X_{i+1} v = a_i v$.
- Таким образом, $\alpha' \in \mathrm{Spec}(n)$ и v совпадает с $v_{\alpha'}$ с точностью до константы.
- Так как $v \in V^{\lambda_n}$, имеем $\alpha' \sim \alpha$.
  Матрицы – элементарная проверка ($\bigstar$) .

Замечания

- Если $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Spec}(n)$ и $a_i \neq a_{i+1} \pm 1$, будем говорить, что транспозиция s_i допустима для α.
- Допустимые транспозиции сохраняют $\mathrm{Spec}(n)$.
- Если вектор $\beta \in \mathrm{Spec}(n)$ получен из $\alpha \in \mathrm{Spec}(n)$ последовательностью допустимых транспозиций, то $\beta \sim \alpha$.

Далее докажем, что $\mathrm{Spec}(n)$ состоит из целочисленных векторов.