Спецкурс «Симметрические функции»

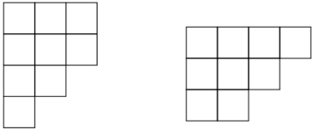
Лекция 1. Алгебра симметрических функций. Мономиальные, элементарные и полные однородные симметрические функции.

Н. В. Цилевич

3 сентября 2021 г.

Разбиения, диаграммы Юнга и др.

- Разбиение числа $n \in \mathbb{N}$: $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$, $\sum \lambda_i = n$.
- Изображаются в виде диаграмм Юнга.
- **Пример.** $\lambda = (3, 3, 2, 1) = (3^2 21)$, $\lambda' = (4, 3, 2)$.



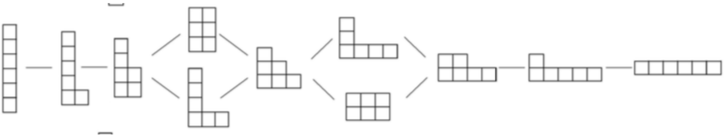
- Размер: $|\lambda| = \sum \lambda_i$.
- Длина: $\ell(\lambda) = \#\{i : \lambda_i \neq 0\}$.
- Кратность: $m_k = \#\{i : \lambda_i = k\}$.
- Запись через кратности: $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots) = (k^{m_k})$.
- Сопряжённая диаграмма λ': транспонируем диаграмму λ.
- ($\bigstar$) Записать формулами $\lambda'_i = \ldots$, $m_i(\lambda') = \ldots$.

Три упорядочения на разбиениях

- По включению: $\mu \subseteq \lambda \iff \mu_i \leq \lambda_i$ для всех i.
  Пример: $(32) \subseteq (421)$.

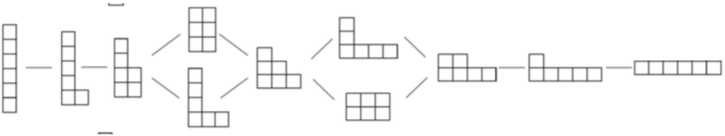
Три упорядочения на разбиениях

- По включению: $\mu \subseteq \lambda \iff \mu_i \leq \lambda_i$ для всех i.
  Пример: $(32) \subseteq (421)$.
- По доминированию: $\mu \trianglelefteq \lambda \iff |\mu| = |\lambda|$ и $\mu_1 + \cdots + \mu_i \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$ для всех i.
  Пример:



Три упорядочения на разбиениях

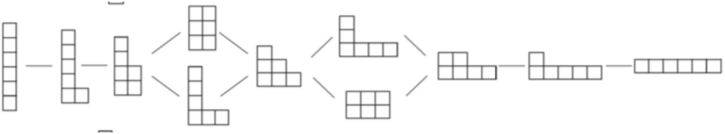
- По включению: $\mu \subseteq \lambda \iff \mu_i \le \lambda_i$ для всех i.
  Пример: $(32) \subseteq (421)$.
- По доминированию: $\mu \trianglelefteq \lambda \iff |\mu| = |\lambda|$ и $\mu_1 + \cdots + \mu_i \le \lambda_1 + \cdots + \lambda_i$ для всех i.
  Пример:



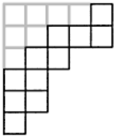
- Обратное лексикографическое: $\mu \overset{R}{\leqslant} \lambda \iff$ либо $\mu = \lambda$, либо для некоторого i имеем $\mu_1 = \lambda_1, \ \ldots, \ \mu_i = \lambda_i, \ \mu_{i+1} < \lambda_{i+1}$.
  Пример: $(1^6) \overset{R}{<} (21^4) \overset{R}{<} (2^2 1^2) \overset{R}{<} (2^3) \overset{R}{<} (31^3) \overset{R}{<} (321) \overset{R}{<} (3^2) \overset{R}{<}$ $\overset{R}{<} (41^2) \overset{R}{<} (42) \overset{R}{<} (51) \overset{R}{<} (6)$.

Свойства упорядочений

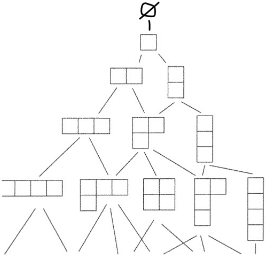
- $\subseteq$ — частичное (($\bigstar$) начиная с какого n?);
- $\trianglelefteq$ — частичное при $n \geq 6$; (($\bigstar$) приведите пример несравнимых);
- ($\bigstar$) $\mu \trianglelefteq \lambda \iff \lambda' \trianglelefteq \mu'$;
- ($\bigstar$) $\mu \trianglelefteq \lambda \implies \mu \overset{R}{\leqslant} \lambda$ (т.е. $\overset{R}{\leqslant}$ согласовано с $\trianglelefteq$) и $\lambda' \overset{R}{\leqslant} \mu'$ (т.е. «обратное сопряжённое» к $\overset{R}{\leqslant}$ также согласовано с $\trianglelefteq$).



- $\mu \subseteq \lambda \rightsquigarrow$ косая диаграмма Юнга λ/μ: выкинули клетки μ из λ.
- **Пример:** косая диаграмма $(5^2 3 2^2 1)/(421)$:



- $\Pi_n = \{\lambda : |\lambda| = n\}$, $\#\Pi(n) = p(n)$, $n \geq 0$, где $\Pi_0 = \{\emptyset\}$.
- Обозначение: $\lambda \in \Pi_n \iff \lambda \vdash n$.
- (★) $p(n) = 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, \ldots$.
- (★) $\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$.
- $(\Pi, \subseteq)$ — граф (решётка) Юнга.



- (★) Для любой $\lambda \in \Pi_n$ число смежных вершин на следующем уровне минус число смежных вершин на предыдущем уровне $= 1$.

Разложения и слабые разложения

- Разложение числа n: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$: $\alpha_i > 0$, $\sum \alpha_i = n$.
- Слабое разложение числа n: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$: $\alpha_i \geq 0$, $\sum \alpha_i = n$; $W_n :=$ множество слабых разложений n.

Алгебра симметрических функций

- R — коммутативное кольцо с 1 (у нас $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}$); $x = (x_1, x_2, \dots)$ — набор переменных; $\alpha \in W_n \rightsquigarrow x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots$
- Однородная симметрическая функция степени n над R — формальный степенной ряд $f(x) = \sum_{\alpha \in W_n} c_\alpha x^\alpha$, $c_\alpha \in R$: $f(x_{w(1)}, x_{w(2)}, \dots) = f(x_1, x_2, \dots)$ для любой перестановки $w \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$.
  Однородная симметрическая функция степени 0 = константа.
- $\Lambda_R^n :=$ множество однородных функций степени n над R.

Пример: $f(x) = x_1^3 + x_2^3 + \ldots \in \Lambda_{\mathbb{Z}}^3$.

Алгебра симметрических функций

- $\Lambda^n_{\mathbb{Q}}$ — векторное пространство над $\mathbb{Q}$;
- $f \in \Lambda^m_{\mathbb{Q}},\ g \in \Lambda^n_{\mathbb{Q}} \implies fg \in \Lambda^{m+n}_{\mathbb{Q}}$.
- $\boxed{\Lambda := \Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda^0_{\mathbb{Q}} \oplus \Lambda^1_{\mathbb{Q}} \oplus \dots}$
  $= \{f_0 + f_1 + \dots : f_n \in \Lambda^n_{\mathbb{Q}}$, кон. число ненулевых слагаемых$\}$ — алгебра (над $\mathbb{Q}$) симметрических функций
- Λ — коммутативная градуированная алгебра (над $\mathbb{Q}$) с единицей $(1 \in \Lambda_0)$.

Центральная тема: различные базисы в Λ, матрицы перехода между ними, тождества, которым они удовлетворяют!

Мономиальные симметрические функции

- $\lambda \vdash n \rightsquigarrow$ мономиальная симметрическая функция $m_\lambda(x) \in \Lambda^n$: $\boxed{m_\lambda = \sum_\alpha x^\alpha}$, сумма — по всем различным перестановкам α последовательности $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$
- **Примеры:** $m_\emptyset = 1$, $m_{(1)} = \sum_i x_i$, $m_{(2)} = \sum_i x_i^2$, $m_{(11)} = \sum_{i<j} x_i x_j$.

Предложение

$\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Pi_n}$ — базис (в.п.) Λ^n, $\{m_\lambda\}_{\lambda \in \Pi}$ — базис Λ.

Доказательство: $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \Lambda^n \implies f = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda m_\lambda$.

Следствие

$\dim \Lambda^n = p(n)$.

Элементарные симметрические функции

- $\lambda \vdash n \rightsquigarrow$ элементарная симметрическая функция $e_\lambda(x) \in \Lambda^n$:
  $\boxed{e_n := m_{(1^n)} = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}}$ при $n \geq 1$ и $\boxed{e_0 = m_\emptyset = 1}$;
  $\boxed{e_\lambda := e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots}$ при $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$.
- **Примеры:** $e_1 = m_1$, $e_{11} = m_2 + 2m_{11}$, $e_2 = m_{11}$,
  $e_{111} = m_3 + 3m_{21} + 6m_{111}$, $e_{21} = m_{21} + 3m_{111}$, $e_3 = m_{111}$.
- Производящая функция элементарных симметрических функций:
  $E(t) := \sum_{n=0}^{\infty} e_n t^n \in \Lambda[[t]]$.

Предложение (★)

$$\boxed{E(t) = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t)}.$$

- $\mathcal{M} := \{A = (a_{ij})_{i,j\geq 1} \colon a_{ij} \in \mathbb{Z}, \text{кон. число ненул. эл-тов}\}$.
- $\mathcal{M}^{01} := \{A \in \mathcal{M} \colon a_{ij} \in \{0, 1\}\}$, $\mathcal{M}^{\geq 0} := \{A \in \mathcal{M} \colon a_{ij} \geq 0\}$.
- $A \rightsquigarrow r_i := \sum_j a_{ij}$, $c_j := \sum_i a_{ij}$,
  $\mathrm{row}(A) := (r_1, r_2, \ldots)$, $\mathrm{col}(A) = (c_1, c_2, \ldots)$.

Предложение

$\lambda \in \Pi_n$, $\alpha \in W_n \rightsquigarrow M_{\lambda\alpha} := [x^\alpha]e_\lambda$, т.е. $e_\lambda = \sum\limits_{\mu \vdash n} M_{\lambda\mu} m_\mu$. Тогда
$M_{\lambda\alpha} = \#\{A \in \mathcal{M}^{0,1} \colon \mathrm{row}(A) = \lambda, \mathrm{col}(A) = \alpha\}$.

Доказательство. $X := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ & \vdots & & \end{bmatrix}$. Слагаемое из e_λ:
выбираем λ_i эл-тов из i-й строки. Пусть их произведение $= x^\alpha$. Заменим выбранные эл-ты на 1, остальные на 0 $\implies$ получим A из условия. И наоборот.

Следствие

1) $M_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_+$; 2) $M_{\lambda\mu} = M_{\mu\lambda}$.

- Док-во: $\mathrm{row}(A) = \lambda$, $\mathrm{col}(A) = \mu \iff \mathrm{row}(A^T) = \mu$, $\mathrm{col}(A^T) = \lambda$.

Следствие

1) $M_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_+$; 2) $M_{\lambda\mu} = M_{\mu\lambda}$.

- Док-во: $\mathrm{row}(A) = \lambda$, $\mathrm{col}(A) = \mu \iff \mathrm{row}(A^T) = \mu$, $\mathrm{col}(A^T) = \lambda$.

Предложение

$$\boxed{\prod_{i,j}(1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} m_\lambda(x) e_\lambda(y)} = \sum_{\lambda,\mu} M_{\lambda\mu} m_\lambda(x) m_\mu(y).$$

Доказательство:

- $x^\alpha y^\beta$ в разложении л.ч. $\leftrightarrow A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}^{0,1}$: $\prod\limits_{i,j} (x_i y_j)^{a_{ij}} = x^\alpha y^\beta$.
- Но $\prod\limits_{i,j} (x_i y_j)^{a_{ij}} = x^{\mathrm{row}(A)} y^{\mathrm{col}(A)} \implies$ коэф. при $x^\alpha y^\beta$ в л.ч. равен $\#\{A \in \mathcal{M}^{0,1}\colon \mathrm{row}(A) = \alpha,\ \mathrm{col}(A) = \beta\} = M_{\alpha\beta} \implies$ QED.

Замечание. Достаточно суммировать по $|\lambda| = |\mu|$.

Предложение

Пусть $\lambda, \mu \vdash n$. *Тогда* 1) $M_{\lambda\mu} \neq 0 \implies \mu \trianglelefteq \lambda'$; 2) $M_{\lambda\lambda'} = 1$.

Доказательство.

- $M_{\lambda\mu} \neq 0 \implies \exists A \in \mathcal{M}^{0,1} \colon \operatorname{row}(A) = \lambda, \operatorname{col}(A) = \mu$.
- Пусть A' — матрица: $\operatorname{row}(A') = \lambda$ и все 1 сдвинуты влево (т.е. $A'_{ij} = 1 \iff 1 \leq j \leq \lambda_i$).
- Число 1 в первых i столбцах A' не меньше, чем у $A \implies \lambda' = \operatorname{col}(A') \trianglerighteq \operatorname{col}(A) = \mu$.
- A' — единственная матрица: $\operatorname{row}(A') = \lambda$, $\operatorname{col}(A') = \lambda' \implies M_{\lambda\lambda'} = 1$.

Теорема (фундаментальная теорема о симметрических функциях)

- $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Pi_n}$ *— базис* Λ^n, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Pi}$ *— базис* Λ *(и даже* $\Lambda_{\mathbb{Z}}$*).*
- *Иными словами,* $e_1, e_2, \ldots$ *алгебраически независимы и порождают* Λ *как* $\mathbb{Q}$*-алгебру:* $\Lambda = \mathbb{Q}[e_1, e_2, \ldots]$.

Доказательство.

- Рассмотрим матрицу $(M_{\lambda\mu})$, в которой строки $\lambda^1, \ldots, \lambda^{p(n)}$ упорядочены по $\overset{R}{\geqslant}$, а столбцы — в «обратном сопряжённом порядке» $(\lambda^{p(n)})', \ldots, (\lambda^1)'$.
- Тогда матрица $(M_{\lambda\mu})$ верхнетреугольная с 1 на диагонали $\Longrightarrow$ обратима.
- Это матрица перехода от базиса $\{m_\lambda\}_{\lambda\in\Pi_n}$ к $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Pi_n}$ $\Longrightarrow$ $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Pi_n}$ — базис Λ^n.

Замечание. На самом деле это $\mathbb{Z}$-базис.

- $\lambda \vdash n \rightsquigarrow$ полная однородная симметрическая функция $h_\lambda(x) \in \Lambda^n$:
  $\boxed{h_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = \sum_{i_1 \le \cdots \le i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}}$ при $h \ge 1$ и $\boxed{h_0 = m_\emptyset = 1}$;
  $\boxed{h_\lambda := h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots}$ при $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$.
- **Примеры:** $h_1 = m_1$,
  $h_{11} = 2m_{11} + m_2$,
  $h_2 = m_{11} + m_2$,
  $h_{111} = 6m_{111} + 3m_{21} + m_3$,
  $h_{21} = 3m_{111} + 2m_{21} + m_3$,
  $h_3 = m_{111} + m_{21} + m_3$.

- Производящая функция полных однородных симметрических функций: $H(t) := \sum_{n=0}^{\infty} h_n t^n \in \Lambda[[t]]$.

Предложение (★)

$$\boxed{H(t) = \prod_{i\geq 1}(1 - x_i t)^{-1}}.$$

Следствие (первое проявление двойственности между e_n и h_n)

$\boxed{H(t)E(-t) = 1}$, *т.е.* $\sum_{r=0}^{n}(-1)^r e_r h_{n-r} = 0$ *для любого* $n \geq 1$.

Предложение

$\lambda \in \Pi_n$, $\alpha \in W_n \rightsquigarrow N_{\lambda\alpha} := [x^\alpha]h_\lambda$, *т.е.* $h_\lambda = \sum\limits_{\mu\vdash n} N_{\lambda\mu}m_\mu$. *Тогда*

$N_{\lambda\alpha} = \#\{A \in \mathcal{M}^{\geq 0}\colon\ \mathrm{row}(A) = \lambda,\ \mathrm{col}(A) = \alpha\}$.

Следствие

$1)\ N_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z}_+$; $2)\ N_{\lambda\mu} = N_{\mu\lambda}$.

Предложение

$$\boxed{\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_\lambda m_\lambda(x)h_\lambda(y)} = \sum_{\lambda,\mu} N_{\lambda\mu}m_\lambda(x)m_\mu(y).$$

Замечание. Достаточно суммировать по $|\lambda| = |\mu|$.

(★) Доказать утверждения аналогично случаю e_n.
(★) Дать комбинаторную интерпретацию $M_{\lambda\mu}$ и $N_{\lambda\mu}$ в терминах размещения шаров в ящики.

- **Пример 1.** Пусть $x_1 = \ldots = x_n = 1$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0 \implies$
  - $e_k = \sum\limits_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} 1 = \binom{n}{k}$,

    $h_k = \sum\limits_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} 1 = \binom{n+k-1}{k}$.
  - Другой способ: $E(t) = (1+t)^n$, $H(t) = (1-t)^{-n} \implies$ то же.

- **Пример 1.** Пусть $x_1 = \ldots = x_n = 1$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0 \implies$
  - $e_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} 1 = \binom{n}{k}$,
    $h_k = \sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n} 1 = \binom{n+k-1}{k}$.
  - Другой способ: $E(t) = (1+t)^n$, $H(t) = (1-t)^{-n} \implies$ то же.
- **Пример 2.** Положим $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$ и устремим $n \to \infty$.
  - Тогда $e_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}$ и аналогично $h_k = \frac{1}{k!} \implies$
  - $E(t) = H(t) = e^t$.
  - (★) Найти m_λ.