Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 2. Инволюция ω. Степенные суммы.

Н. В. Цилевич

10 сентября 2021 г.

Инволюция ω

- Эндоморфизм $f : \Lambda \to \Lambda$ задаётся значениями $f(e_n)$, $n \geq 1$.

Инволюция ω

- Эндоморфизм $f : \Lambda \to \Lambda$ задаётся значениями $f(e_n)$, $n \geq 1$.
- Зададим эндоморфизм $\omega : \Lambda \to \Lambda$ формулой $\omega(e_n) = h_n$, $n \geq 1$.

Инволюция ω

- Эндоморфизм $f : \Lambda \to \Lambda$ задаётся значениями $f(e_n)$, $n \geq 1$.
- Зададим эндоморфизм $\omega : \Lambda \to \Lambda$ формулой $\omega(e_n) = h_n$, $n \geq 1$.
- Тогда $\omega(e_\lambda) = h_\lambda$.

Инволюция ω

- Эндоморфизм $f : \Lambda \to \Lambda$ задаётся значениями $f(e_n)$, $n \geq 1$.
- Зададим эндоморфизм $\omega : \Lambda \to \Lambda$ формулой $\omega(e_n) = h_n$, $n \geq 1$.
- Тогда $\omega(e_\lambda) = h_\lambda$.

Теорема

ω — инволюция: $\omega^2 = 1$.

Инволюция ω

- Эндоморфизм $f : \Lambda \to \Lambda$ задаётся значениями $f(e_n)$, $n \geq 1$.
- Зададим эндоморфизм $\omega : \Lambda \to \Lambda$ формулой $\omega(e_n) = h_n$, $n \geq 1$.
- Тогда $\omega(e_\lambda) = h_\lambda$.

Теорема

ω — инволюция: $\omega^2 = 1$.

Следствие

- $\omega(h_n) = e_n$, $\omega(h_\lambda) = e_\lambda$.
- *ω — автоморфизм Λ.*
- $\{h_\lambda\}_{\lambda \in \Pi_n}$ *— базис* Λ^n, $\{h_\lambda\}_{\lambda \in \Pi}$ *— базис* Λ;
  иными словами, $h_1, h_2, \ldots$ *алгебраически независимы и порождают* Λ *как* $\mathbb{Q}$*-алгебру:* $\Lambda = \mathbb{Q}[h_1, h_2, \ldots]$.

Замечание. На самом деле это $\mathbb{Z}$-базис.

Теорема

ω — инволюция: $\omega^2 = 1$.

Доказательство.

- Было: $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i e_i h_{n-i} = 0$ для любого $n \geq 1$.
- **Примеры:** $h_1 - e_1 = 0$, $h_2 - e_1 h_1 + e_2 = 0$, $h_3 - e_1 h_2 + e_2 h_1 - e_3 = 0$.
- Факт: если $u_i \in \Lambda$, где $u_0 = 1$, таковы, что $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i u_i h_{n-i} = 0$ для любого $n \geq 1$, то $u_i = e_i$.
- Применим ω: $0 = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i h_i \omega(h_{n-i}) = (-1)^n \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \omega(h_i) h_{n-i} = 0$ $\Longrightarrow \omega(h_i) = e_i$.

Симметрические степенные суммы (Ньютона)

- $\lambda \vdash n \rightsquigarrow$ симметрическая степенная сумма $p_\lambda \in \Lambda^n$:
  $\boxed{p_n = m_{(n)} = \sum_i x_i^n}$ при $n \geq 1$ и $\boxed{p_0 = m_\emptyset = 1}$;
  $\boxed{p_\lambda := p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots}$ при $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$.
- Производящая функция степенных сумм:
  $$\boxed{P(t) := \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} \in \Lambda[[t]]}.$$

Обратите внимание, что степень $r - 1$ и суммирование по $r \geq 1$!

- Производящая функция степенных сумм:

$$\boxed{P(t) := \sum_{r\geq 1} p_r t^{r-1} \in \Lambda[[t]]}.$$

Предложение

$$\boxed{P(t) = \frac{H'(t)}{H(t)}}, \quad \boxed{P(-t) = \frac{E'(t)}{E(t)}}.$$

Доказательство. $P(t) = \sum\limits_{i\geq 1}\sum\limits_{r\geq 1} x_i^r t^{r-1} = \sum\limits_{i\geq 1} \frac{x_i}{1-x_i t} = \sum\limits_{i\geq 1} \frac{d}{dt} \ln \frac{1}{1-x_i t} =$
$= \frac{d}{dt} \ln \prod\limits_{i\geq 1} (1 - x_i t)^{-1} = \frac{d}{dt} \ln H(t) = \frac{H'(t)}{H(t)}$. Второе тождество аналогично ($\star$) .

Следствие (тождества Ньютона)

$$\boxed{nh_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r}}, \quad \boxed{ne_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}}.$$

Примеры: $h_1 = p_1$, $h_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2$, $h_3 = \frac{1}{6}p_1^3 + \frac{1}{2}p_1 p_2 + \frac{1}{3}p_3$,
$e_1 = p_1$, $e_2 = \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2$, $e_3 = \frac{1}{6}p_1^3 - \frac{1}{2}p_1 p_2 + \frac{1}{3}p_3$.

Следствие (тождества Ньютона)

$$\boxed{nh_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r}}, \quad \boxed{ne_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}}.$$

Примеры: $h_1 = p_1$, $h_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2$, $h_3 = \frac{1}{6}p_1^3 + \frac{1}{2}p_1p_2 + \frac{1}{3}p_3$,
$e_1 = p_1$, $e_2 = \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2$, $e_3 = \frac{1}{6}p_1^3 - \frac{1}{2}p_1p_2 + \frac{1}{3}p_3$.

Следствие

- $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Pi_n}$ *— базис* Λ^n, $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Pi}$ *— базис* Λ.
- *Иными словами,* $p_1, p_2, \ldots$ *алгебраически независимы и порождают* Λ *как* $\mathbb{Q}$*-алгебру:* $\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$.

Замечание. $\{p_\lambda\}$ — $\mathbb{Q}$-базис, но не $\mathbb{Z}$-базис!

Следствие (тождества Ньютона)

$$\boxed{nh_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r}}, \quad \boxed{ne_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} p_r e_{n-r}}.$$

Примеры: $h_1 = p_1$, $h_2 = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2$, $h_3 = \frac{1}{6}p_1^3 + \frac{1}{2}p_1p_2 + \frac{1}{3}p_3$,
$e_1 = p_1$, $e_2 = \frac{1}{2}p_1^2 - \frac{1}{2}p_2$, $e_3 = \frac{1}{6}p_1^3 - \frac{1}{2}p_1p_2 + \frac{1}{3}p_3$.

Следствие

- $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Pi_n}$ — *базис* Λ^n, $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Pi}$ — *базис* Λ.
- *Иными словами,* $p_1, p_2, \ldots$ *алгебраически независимы и порождают* Λ *как* $\mathbb{Q}$*-алгебру:* $\Lambda = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$.

Замечание. $\{p_\lambda\}$ — $\mathbb{Q}$-базис, но не $\mathbb{Z}$-базис!

Следствие

$\omega p_n = (-1)^{n-1} p_n$, $\boxed{\omega p_\lambda = \varepsilon_\lambda p_\lambda}$, *где* $\varepsilon_\lambda = (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)}$.

Доказательство: следует из того, что $\omega E(t) = H(t)$.

Цикловый тип перестановки

- $\lambda = (k^{m_k}) \rightsquigarrow z_\lambda := \prod_{k \geq 1} k^{m_k} m_k!$.
- Цикловый тип перестановки $w \in \mathfrak{S}_n$ = разбиение $\rho(w) \in \Pi_n$, состоящее из длин циклов w в разложении на неперес. циклы.
- (★) Лемма Коши: $\#\{w \in \mathfrak{S}_n : \rho(w) = \lambda\} = \frac{n!}{z_\lambda}$.
- Т.о. $\frac{n!}{z_\lambda}$ — мощность класса сопряжённости, соответствующего цикловому типу λ.
- (★) Пусть $w \in \mathfrak{S}_n$, $\rho(w) = \lambda$. Тогда $z_\lambda = \#\{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma w = w\sigma\}$.
- Напомним: $\varepsilon_\lambda = (-1)^{|\lambda| - \ell(\lambda)}$.
- Для $w \in \mathfrak{S}_n$ имеем $\varepsilon_{\rho(w)} = \operatorname{sgn} w$.

Предложение

$$\boxed{H(t) = \sum_{\lambda} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda t^{|\lambda|}}, \quad \boxed{E(t) = \sum_{\lambda} \frac{\varepsilon_\lambda}{z_\lambda} p_\lambda t^{|\lambda|}}.$$

$$\boxed{h_n = \sum_{|\lambda|=n} \frac{p_\lambda}{z_\lambda}}, \quad \boxed{e_n = \sum_{|\lambda|=n} \frac{\varepsilon_\lambda}{z_\lambda} p_\lambda}.$$

Доказательство. $H(t) = \exp \sum_{r\geq 1} \frac{p_r t^r}{r} = \prod_{r\geq 1} \exp(\frac{p_r t^r}{r}) = \prod_{r\geq 1} \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{(p_r t^r)^{m_r}}{r^{m_r} \cdot m_r!}$
$= \sum_{\lambda=(r^{m_r})} \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda t^{|\lambda|}.$

Второе тождество — применением ω.

Напоминание

$$\boxed{\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} m_\lambda(x) h_\lambda(y)}.$$

$$\boxed{\prod_{i,j}(1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda} m_\lambda(x) e_\lambda(y)}.$$

Предложение

$$\boxed{\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_{\lambda}\frac{1}{z_\lambda}p_\lambda(x)p_\lambda(y)=\exp\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y)},$$

$$\boxed{\prod_{i,j}(1+x_iy_j)=\sum_{\lambda}\frac{\varepsilon_\lambda}{z_\lambda}p_\lambda(x)p_\lambda(y)=\exp\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}(-1)^{n-1}p_n(x)p_n(y)}.$$

Доказательство.

- $\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}=H_{\{x_iy_j\}}(1)=\sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda}p_\lambda(\{x_iy_j\})=\sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda}p_\lambda(x)p_\lambda(y).$
- $\ln\prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_{i,j}\ln(1-x_iy_j)^{-1}=\sum_{i,j}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}x_i^ny_j^n$
  $=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(\sum_i x_i^n\right)\left(\sum_j y_j^n\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}p_n(x)p_n(y).$
- Вторая пара тождеств — аналогично.

Применения: многочлены Белла

- Рассмотрим формальные степенные ряды $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n t^n}{n!}$, $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_n t^n}{n!}$, $g_0 = 0$.
- Пусть $H(t) := f(g(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n t^n}{n!} \implies H_n = \sum_{k=1}^{n} f_k B_{n,k}(g)$.
- $B_{n,k}$ — частичные многочлены Белла.

Предложение

$B_{n,k} = \sum_{|\lambda|=n,\, \ell(\lambda)=k} c_\lambda g_\lambda$, где $g_\lambda = \prod g_i^{m_i}$, $c_\lambda = \frac{n!}{\prod (i!)^{m_i} m_i!}$.

- ($\bigstar$) $c_\lambda \in \mathbb{Z}$ (дать комбинаторную интерпретацию).

Доказательство

- $H(t) := f(g(t)) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{H_n t^n}{n!}$, где $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k B_{n,k}(g)$.
- H_n линейно зависит от $\{f_i\} \implies$ можно взять $f_k = a^k$, т.е. $f(t) = e^{at}$.
- Интерпретируем $H(t)$ как производящую функцию полных однородных симметрических функций!
- $H(t) = \exp(ag(t)) \implies P(t) = (\ln H(t))' = ag'(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{ag_k t^{k-1}}{(k-1)!}$ $\implies p_k = \frac{ag_k}{(k-1)!}$.
- $H(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} h_n t^n \implies H_n = n! h_n = \sum\limits_{|\lambda|=n} \frac{n!}{z_\lambda} p_\lambda$.
- $p_\lambda = \frac{a^n g_\lambda}{\prod((k-1)!)^{m_k}}$, $z_\lambda := \prod\limits_{k \geq 1} k^{m_k} m_k!$.
- $B_{n,k} = [a^k]H(t) = \sum\limits_{|\lambda|=n,\, \ell(\lambda)=k} c_\lambda g_\lambda$.

Частный случай: $g(t) = \ln(1+t)$, $f(t) = e^{at} \implies$

- $H(t) = (1+t)^a$, $g_n = (-1)^{n-1}(n-1)!$,
- $p_n = (-1)^{n-1}a$,
- $B_{n,k} = \sum_{|\lambda|=n,\,\ell(\lambda)=k} (-1)^{n-k}\frac{n!}{z_\lambda} \implies$
- $B_{n,k} = s(n,k)$ — числа Стирлинга 1 рода:

$$(-1)^{n-k}s(n,k) = \#\{w \in \mathfrak{S}_n \colon c(w) = k\},$$

  где $c(w)$ — число циклов w.
- Имеем $\sum_{n,k\geq 0} s(n,k)a^k\frac{t^n}{n!} = (1+t)^a = \sum_{n\geq 0}\binom{a}{n}t^n \implies$
- $\sum_{k=0}^{n} s(n,k)a^k = \binom{a}{n}n! = a(a-1)\dots(a-n+1) = (a)_n =$

  $= a^n\prod_{i=1}^{n-1}(1-ia^{-1}) = a^nE_{\{-1,-2,\dots,-(n-1)\}}(a^{-1}) \implies$
- $\boxed{s(n,k) = e_{n-k}(-1,-2,\dots,-(n-1))}$.

Частный случай: $g(t) = e^t - 1 \implies$

- $g_n = 1$,
- $p_n = \frac{a}{(n-1)!}$,
- $B_{n,k} = \sum\limits_{|\lambda|=n,\, \ell(\lambda)=k} \frac{n!}{\prod (i!)^{m_i} m_i!} = S(n,k)$ — числа Стирлинга 2 рода.
- (★) Дать комбинаторную интерпретацию чисел Стирлинга 2 рода.
- (★) $S(n,k) = h_{n-k}(1, 2, \ldots, k)$.
- (★) Формула Фаа-ди-Бруно: f, g — n-дифференцируемы $\implies$

  $(f \circ g)^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} B_{n,k}(g', g'', \ldots)(f^{(k)} \circ g)$.