Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 3. Стандартное скалярное произведение в алгебре симметрических функций. Комбинаторное определение функций Шура

Н. В. Цилевич

17 сентября 2021 г.

Стандартное скалярное произведение в Λ

- $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ — взаимные базисы относительно скал. произв. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $\iff$ $\langle u_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$.

Стандартное скалярное произведение в Λ

- $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ — взаимные базисы относительно скал. произв. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\iff$ $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.
- Стандартное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на Λ: относительно которого базисы $\{m_\lambda\}$ и $\{h_\lambda\}$ взаимны, т.е. $\boxed{\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}}$

Стандартное скалярное произведение в Λ

- $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ — взаимные базисы относительно скал. произв. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $\iff$ $\langle u_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$.
- Стандартное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на Λ: относительно которого базисы $\{m_\lambda\}$ и $\{h_\lambda\}$ взаимны, т.е. $\boxed{\langle m_\lambda, h_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}}$
- Ну, строго говоря, пока это не скалярное произведение, а билинейная форма...

Стандартное скалярное произведение в Λ

- $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ — взаимные базисы относительно скал. произв. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\iff$ $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$.
- Стандартное скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на Λ: относительно которого базисы $\{m_\lambda\}$ и $\{h_\lambda\}$ взаимны, т.е. $\boxed{\langle m_\lambda, h_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}}$
- Ну, строго говоря, пока это не скалярное произведение, а билинейная форма...
- Однородно: $f \in \Lambda^n$, $g \in \Lambda^m$, $n \neq m \implies \langle f, g \rangle = 0$.

Предложение

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ симметрично: $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ для всех $f, g \in \Lambda$.

Доказательство. Достаточно проверить на базисе. Возьмём базис $\{h_\lambda\} \implies \langle h_\lambda, h_\mu \rangle = \langle \sum_\nu N_{\lambda\nu} m_\nu, h_\mu \rangle = N_{\lambda\mu}$. Но $N_{\lambda\mu} = N_{\mu\lambda} \implies$ QED.

Лемма

Пусть $\{u_i\}$, $\{v_j\}$ *— базисы в* Λ, *причём* $u_\lambda, v_\lambda \in \Lambda^n$ *при* $|\lambda| = n$. *Тогда они взаимны* $\iff \sum\limits_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(y) = \prod\limits_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1}$.

Доказательство.

- $u_\lambda = \sum\limits_\rho a_{\lambda\rho} m_\rho$, $v_\mu = \sum\limits_\sigma b_{\mu\sigma} h_\sigma$, $A = (a_{\lambda\rho})$, $B = (b_{\mu\sigma})$.
- $\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \sum\limits_\rho a_{\lambda\rho} b_{\mu\rho}$.
- Взаимность $\iff \sum\limits_\rho a_{\lambda\rho} b_{\mu\rho} = \delta_{\lambda\mu} \iff AB^T = I$.
- Тождество из условия $\iff \sum\limits_\rho m_\rho(x)h_\rho(y) = \sum\limits_\lambda u_\lambda(x)v_\lambda(y) =$
  $= \sum\limits_{\rho,\sigma}(\sum\limits_\lambda a_{\lambda\rho} b_{\lambda\sigma}) m_\rho(x) h_\sigma(y) \iff \sum\limits_\lambda a_{\lambda\rho} b_{\lambda\sigma} = \delta_{\rho\sigma} \iff A^T B = I$.
- $AB^T = I \iff A = (B^T)^{-1} = (B^{-1})^T \iff A^T = B^{-1} \iff$
  $\iff A^T B = I$.

Предложение

$\boxed{\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}}$. *В частности* $\{p_\lambda\}$ *— ортогональный (но не ортонормированный!) базис* Λ.

Доказательство: $\prod\limits_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum\limits_\lambda \frac{1}{z_\lambda} p_\lambda(x) p_\lambda(y) \implies \{p_\lambda\}$ и $\{p_\mu/z_\mu\}$ — взаимные базисы.

Следствие

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ положительно определено: $\langle f, f \rangle \geq 0$ для любой $f \in \Lambda$, причем $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$.

Доказательство: $f = \sum c_\lambda p_\lambda \implies \langle f, f \rangle = \sum c_\lambda^2 z_\lambda \implies \text{QED}$.

Следствие

ω — изометрия: $\langle \omega f, \omega g \rangle = \langle f, g \rangle$ для любых $f, g \in \Lambda$.

Доказательство: в силу билинейности достаточно проверить для $f = p_\lambda$ и $g = p_\mu$.

Полустандартные таблицы Юнга

- Полустандартная таблица Юнга T формы $\lambda \in \Pi$ = заполнение диаграммы λ неотрицательными целыми числами: нестрого возрастают по строкам, строго возрастают по столбцам.
- **Пример:**

1	1	1	3	4	4
2	4	4	5	5	
5	5	7			
6	9	9			

- $\lambda = \mathrm{sh}(T)$ — форма T.
- T имеет тип $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in W_n \iff$ в T имеется $\alpha_i = \alpha_i(T)$ элементов i; обозначение: $\alpha = \mathrm{type}(T)$.
- $T \rightsquigarrow x^T = x_1^{\alpha_1(T)} x_2^{\alpha_2(T)} \ldots$.
- **Пример:** $\mathrm{type}(T) = (3, 1, 1, 4, 4, 1, 1, 0, 2)$, $x^T = x_1^3 x_2 x_3 x_4^4 x_5^4 x_6 x_7 x_9^2$.

- $\mathrm{SSYT}(\lambda)$ — множество всех полустандартных таблиц формы λ.
- $\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha)$ — множество всех полустандартных таблиц формы λ и типа α.

- $\mathrm{SSYT}(\lambda)$ — множество всех полустандартных таблиц формы λ.
- $\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha)$ — множество всех полустандартных таблиц формы λ и типа α.

Аналогично всё это определяется для косых таблиц.

Пример. Полустандартная таблица формы $(6, 5, 3, 3)/(3, 1)$ типа $(1, 2, 2, 3, 0, 1, 2, 2)$:

			3	4	4
	1	4	7	7	
2	2	6			
3	8	8			

Комбинаторное определение функций Шура

- Косая функция Шура $\boxed{s_{\lambda/\mu} := \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)} x^T}$.
- $\mu = \emptyset \implies \lambda/\mu = \lambda \rightsquigarrow$ функция Шура s_λ.
- $\ell(\lambda) > n \implies s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
- **Примеры.**
  - Все полустандартные таблицы формы $\lambda = (2,1)$ с наибольшим элементом ≤ 3:

    $\begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 11 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 22 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 23 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 12 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 13 \\ 2 \end{matrix}$

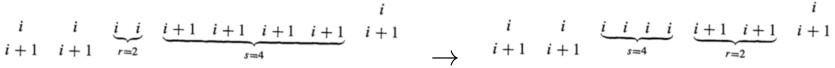
    Таким образом,
    $s_{21}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3$
    $= m_{21}(x_1, x_2, x_3) + 2m_{111}(x_1, x_2, x_3) \implies$
    $s_{21} = m_{21} + 2m_{111}$ (уже в Λ, т.е. от бесконечного числа переменных!).
  - $(\bigstar)$ $s_{(n)} = h_n$, $s_{(1^n)} = e_n$.
- Пока неочевидно, что s_λ — симметрическая функция!

Теорема

$s_{\lambda/\mu} \in \Lambda$ для любой косой диаграммы λ/μ.

Доказательство.

- Достаточно доказать инвариантность относительно $x_i \leftrightarrow x_{i+1}$.
- Пусть $\tilde{\alpha} = (\ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \alpha_{i+2}, \ldots)$. Хотим биекцию $\phi_i : \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu, \alpha) \to \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu, \tilde{\alpha})$.
- Рассмотрим часть, содержащую i и $i+1$. Только столбцы, содержащие ровно один из них. Получим части строк вида $i^r(i+1)^s$. Заменим на $i^s(i+1)^r$. Это искомая биекция.



Замечание. Использованные операции ϕ_i называются инволюциями Бендера–Кнута.

Числа Костки

- $\lambda \in \Pi_n$, $\alpha \in W_n \rightsquigarrow$ число Костки $K_{\lambda\alpha} := \#\,\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha)$.
- $s_\lambda = \sum\limits_{\alpha \in W_n} K_{\lambda\alpha} x^\alpha = \sum\limits_{\mu \vdash n} K_{\lambda\mu} m_\mu$.
- Аналогично косое число Костки $K_{\lambda/\nu,\alpha} := \#\,\mathrm{SSYT}(\lambda/\nu, \alpha)$.
- $s_{\lambda/\nu} = \sum\limits_{\mu \vdash n} K_{\lambda/\nu,\mu} m_\mu$.
- Для $K_{\lambda\mu}$ в общем случае простой формулы нет и не будет!

$$
\begin{aligned}
s_1 &= m_1 \\[1em]
s_{11} &= m_{11} \\
s_2 &= m_{11} + m_2 \\[1em]
s_{111} &= m_{111} \\
s_{21} &= 2m_{111} + m_{21} \\
s_3 &= m_{111} + m_{21} + m_3 \\[1em]
s_{1111} &= m_{1111} \\
s_{211} &= 3m_{1111} + m_{211} \\
s_{22} &= 2m_{1111} + m_{211} + m_{22} \\
s_{31} &= 3m_{1111} + 2m_{211} + m_{22} + m_{31} \\
s_4 &= m_{1111} + m_{211} + m_{22} + m_{31} + m_4 \\[1em]
s_{11111} &= m_{11111} \\
s_{2111} &= 4m_{11111} + m_{2111} \\
s_{221} &= 5m_{11111} + 2m_{2111} + m_{221} \\
s_{311} &= 6m_{11111} + 3m_{2111} + m_{221} + m_{311} \\
s_{32} &= 5m_{11111} + 3m_{2111} + 2m_{221} + m_{311} + m_{32} \\
s_{41} &= 4m_{11111} + 3m_{2111} + 2m_{221} + 2m_{311} + m_{32} + m_{41} \\
s_5 &= m_{11111} + m_{2111} + m_{221} + m_{311} + m_{32} + m_{41} + m_5
\end{aligned}
$$

Замечание. $s_\lambda = m_\lambda + \ldots$, где $\ldots$ раскладывается по m_μ с $\mu \lhd \lambda$ (докажем чуть позже).

Стандартные таблицы Юнга и размерность диаграмм

- **Стандартная таблица Юнга** формы $\lambda \in \Pi_n$ = полустандартная таблица формы λ и типа (1^n), т.е. заполнение клеток λ числами $1, \ldots, n$ так, чтобы они возрастали по строкам и столбцам.

1	2	4	7	8
3	5	6	9	
10				

- $\mathsf{SYT}(\lambda)$ — множество стандартных таблиц Юнга формы λ.
- **Размерность** диаграммы: $\boxed{\dim \lambda := \#\,\mathsf{SYT}(\lambda) = K_{\lambda,(1^n)}}$.
  Аналогично $\dim(\lambda/\mu) = \#\,\mathsf{SYT}(\lambda/\mu) = K_{\lambda/\mu,(1^n)}$.

(★) $\dim\lambda$ совпадает с числом следующих объектов.

- Стандартные таблицы Юнга формы λ.

1 2 3	1 2 4	1 2 5	1 3 4	1 3 5
4 5	3 5	3 4	2 5	2 4

- Пути в графе Юнга от $\emptyset$ до λ, т.е. последовательности $\emptyset = \lambda^0 \subseteq \lambda^1 \subseteq \ldots \subseteq \lambda^n = \lambda$, где $\lambda^k \in \Pi_k$, т.е. λ^k получается из λ^{k-1} добавлением одной клетки.
- Решёточные перестановки (слова Яманочи, баллотировочные последовательности) типа λ, т.е. последовательности $a_1 \ldots a_n$, где i встречается λ_i раз, такие, что в любом подслове $a_1 \ldots a_j$ число букв i не меньше, чем число букв $i+1$.

$$11122 \quad 11212 \quad 11221 \quad 12112 \quad 12121$$

- Решёточные пути в $\mathbb{R}^\ell$ (где $\ell = \ell(\lambda)$) из 0 в $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ с единичными шагами внутри конуса $x_1 \geq \ldots \geq x_\ell \geq 0$.

Обратные полустандартные таблицы

- Обратная полустандартная таблица Юнга формы λ/μ — нестрогое убывание по строкам, строгое убывание по столбцам.

$$\begin{array}{cccccc} & & & 6 & 5 & 5 \\ & 8 & 5 & 2 & 2 & \\ 7 & 7 & 3 & & & \\ 6 & 1 & 1 & & & \end{array}$$

- $\widehat{\mathrm{SSYT}}(\lambda, \alpha)$ — множество обратных полустандартных таблиц формы λ и типа α, $\widehat{K}_{\lambda/\mu,\alpha} = \#\widehat{\mathrm{SSYT}}(\lambda, \alpha)$.

Лемма

$\widehat{K}_{\lambda/\mu,\alpha} = K_{\lambda/\mu,\alpha}$.

Доказательство.

- Пусть $k := \max\{i : \alpha_i \neq 0\}$ и $\bar{\alpha} = (\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_1, 0, 0, \ldots)$.
- $T_{ij} \mapsto k + 1 - T_{ij}$ — биекция: $\widehat{\mathrm{SSYT}}(\lambda, \alpha) \to \mathrm{SSYT}(\lambda, \bar{\alpha})$.
- Знаем: есть биекция между $\mathrm{SSYT}(\lambda, \bar{\alpha})$ и $\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha)$.