Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 4. Алгоритм Робинсона–Шенстеда–Кнута и его следствия.

Н. В. Цилевич

24 сентября 2021 г.

- Матрица $(A_{\lambda\mu})_{\lambda,\mu\in\Pi}$ — строго верхнетреугольная $\iff$ $A_{\lambda\mu} \neq 0$ только при $\lambda \trianglerighteq \mu$.
- Матрица строго верхняя унитреугольная $\iff$ дополнительно $A_{\lambda\lambda} = 1$ для всех $\lambda \in \Pi$.

Предложение

Матрица чисел Костки $(K_{\lambda\mu})$ — строго верхняя унитреугольная.

Доказательство.

- $K_{\lambda\mu} \neq 0 \implies \exists T \in \mathrm{SSYT}(\lambda, \mu)$.
- k не может быть ниже k-й строки $\implies$ все элементы $1, \ldots, k$ в первых k строках $\implies \mu_1 + \ldots + \mu_k \leq \lambda_1 + \ldots + \lambda_k \implies \mu \trianglelefteq \lambda$.
- Если же $\mu = \lambda$, то $T_{ij} = i$ для всех клеток $\implies K_{\lambda\lambda} = 1$.

Следствие

$\{s_\lambda\}_{\lambda\in\Pi_n}$ — *базис* Λ^n, $\{s_\lambda\}_{\lambda\in\Pi}$ — *базис* Λ.

Доказательство.

- Рассмотрим линейный порядок на Π_n, согласованный с $\trianglelefteq$.
- Тогда матрица $(K_{\lambda\mu})$ нижняя унитреугольная $\implies$ обратима.

Замечание. s_λ образуют $\mathbb{Z}$-базис в $\Lambda_{\mathbb{Z}}$.

- Обозначим T_1 первую строку таблицы T, а $T_{2\sim}$ — таблицу, полученную из T удалением первой строки.
- Строчная вставка $T \leftarrow k$ числа $k \in \mathbb{N}$ в $T \in \mathrm{SSYT}$:
  - Если $T = \emptyset$, то $T \leftarrow k = \boxed{k}$.
  - Если $k \geq$ наибольшего элемента T_1, то добавляем k в конец T_1.
  - Иначе пусть k' — самый левый элемент T_1, больший k. Тогда k «выбивает» k' в следующую строку, т.е. в T_1 заменяем k' на k и проделываем $T_{2\sim} \leftarrow k'$.
- Путь вставки $I(T \leftarrow k)$ = множество вставленных элементов.
- **Пример:** вставка $k = 4$.

1 1 2 4 5 5 6	1 1 2 4 **4** 5 6
2 3 3 6 6 8	2 3 3 **5** 6 8
4 4 6 8	4 4 6 **6**
6 7	6 7 **8**
8 9.	8 9.

Свойства строчной вставки

Лемма

- *Путь вставки идёт влево.*
- $j \le k \implies I((T \leftarrow j) \leftarrow k)$ *лежит строго правее* $I(T \leftarrow j)$ *и не продолжается ниже его.*

Доказательство.

- Пусть $(r, s) \in I(T \leftarrow k) \implies$ либо $T_{r+1,s} > T_{rs}$, либо клетка $(r+1, s)$ пуста. В обоих случаях T_{rs} не может быть выбит правее столбца s.
- В первую строку $I(T \leftarrow j)$ число k вставляется строго правее j $\implies$ j выбивает элемент, не больший, чем выбиваемый $k \implies$ по индукции QED первое утверждение.
  Нижний элемент $I(T \leftarrow j)$ был вставлен в конец строки, а элемент $I((T \leftarrow j) \leftarrow k)$ должен быть правее $\implies$ его нет.

Свойства строчной вставки

Лемма

- *Путь вставки идёт влево.*
- $j \le k \implies I((T \leftarrow j) \leftarrow k)$ *лежит строго правее* $I(T \leftarrow j)$ *и не продолжается ниже его.*

Следствие

$T \in \mathrm{SSYT},\ k \in \mathbb{N} \implies T \leftarrow k \in \mathrm{SSYT}.$

Доказательство. Неубывание по строкам очевидно.
Число a выбивает элемент $b > a$, при этом выбитое b вставляется левее, т.е. ниже некоторого элемента $c \le a \implies b > c$.

- Матрицу $A \in \mathcal{M}^{\geq 0}$ отождествляем с конечной матрицей $m \times m$, содержащей её носитель.
- $A \in \mathcal{M}^{\geq 0} \rightsquigarrow$ обобщённая перестановка
  $$w_A = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \cdots & i_m \\ j_1 & j_2 & j_3 & \cdots & j_m \end{pmatrix}, \text{ где}$$
  - для любых (i,j) есть ровно a_{ij} значений r, таких, что $(i_r, j_r) = (i,j)$;
  - $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m$;
  - если $i_r = i_s$ и $r \leq s$, то $j_r \leq j_s$.
- A — перестановочная матрица $\Longrightarrow$ w_A — соответствующая перестановка.
- $A \leftrightarrow w_A$ — биекция.
- **Пример:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad w_A = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,2\,2\,3\,3 \\ 1\,3\,3\,2\,2\,1\,2 \end{pmatrix}.$$

- Если $w_A = \binom{u}{v}$, то $\mathrm{type}(u) = \mathrm{row}(A)$, $\mathrm{type}(v) = \mathrm{col}(A)$.

Алгоритм Робинсона–Шенстеда–Кнута (RSK)

Алгоритм RSK: $A \mapsto (P, Q)$, где $P, Q \in SSYT$, $\mathrm{sh}(P) = \mathrm{sh}(Q)$:

- $(P(0), Q(0)) := (\emptyset, \emptyset)$;
- при $t = 0, 1, \ldots, m-1$:
  - $P(t+1) := P(t) \leftarrow j_{t+1}$;
  - $Q(t+1)$ получается из $Q(t)$ вставкой i_{t+1} так, чтобы $\mathrm{sh}(P(t+1)) = \mathrm{sh}(Q(t+1))$.

$\mathrm{RSK}(A) = (P, Q) := (P(m), Q(m))$.

$$w_A = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,2\,2\,3\,3 \\ 1\,3\,3\,2\,2\,1\,2 \end{pmatrix}.$$

$P(i)$	$Q(i)$
1	1
1 3	1 1
1 3 3	1 1 1
1 2 3 3	1 1 1 2
1 2 2 3 3	1 1 1 2 2
1 1 2 2 3 3	1 1 1 2 2 3
1 1 2 2 2 3 3	1 1 1 3 2 2 3.

Теорема

- RSK : $\mathcal{M}^{\geq 0} \to \{$*пары* SSYT *одинаковой формы*$\}$ *— биекция;*
- $\mathrm{type}(P) = \mathrm{col}(A)$, $\mathrm{type}(Q) = \mathrm{row}(A)$, *т.е. j появляется в P ровно $\sum_i a_{ij}$ раз, i появляется в Q ровно $\sum_j a_{ij}$ раз.*

Доказательство.

- Очевидно: $P \in \mathrm{SSYT}$, $\mathrm{sh}(P) = \mathrm{sh}(Q)$, условия на type.
- Надо доказать:
  - $Q \in \mathrm{SSYT}$;
  - RSK — инъекция;
  - RSK — сюръекция.

Теорема

- RSK : $\mathcal{M}^{\geq 0} \to \{$*пары* SSYT *одинаковой формы*$\}$ — *биекция;*
- $\mathrm{type}(P) = \mathrm{col}(A)$, $\mathrm{type}(Q) = \mathrm{row}(A)$, *т.е. j появляется в P ровно $\sum_i a_{ij}$ раз, i появляется в Q ровно $\sum_j a_{ij}$ раз.*

Доказательство.

- Очевидно: $P \in \mathrm{SSYT}$, $\mathrm{sh}(P) = \mathrm{sh}(Q)$, условия на type.
- Надо доказать:
    - $Q \in \mathrm{SSYT}$;
    - RSK — инъекция;
    - RSK — сюръекция.
- $Q \in \mathrm{SSYT}$.
    - $i_1 \leq \cdots \leq i_m \implies$ нестрогое возрастание по строкам и столбцам.
    - Надо: $i_k = i_{k+1}$ не могут оказаться в одном столбце. Но $i_k = i_{k+1} \implies j_k \leq j_{k+1} \implies$ путь вставки j_{k+1} строго правее и не ниже пути вставки $j_k \implies$ не могут закончиться в одном столбце.
- Итого: равные элементы Q-таблицы вставляются строго слева направо.

- Инъективность.
  - Q_{rs} := самое правое вхождение наибольшего элемента $Q \implies$
  - $Q_{rs} = i_m$, $Q(m-1) = Q_m \setminus Q_{rs}$ и P_{rs} — последний выбитый элемент при вставке j_m в $P(m-1)$.
  - Он выбит самым правым меньшим его элементом предыдущей строки и т.д. $\implies$ восстановим $P(m-1)$ и j_m.
  - Итого: восстановили $(P(m-1), Q(m-1))$ и (i_m, j_m). Далее по индукции.

- Инъективность.
  - $Q_{rs} :=$ самое правое вхождение наибольшего элемента $Q \implies$
  - $Q_{rs} = i_m$, $Q(m-1) = Q_m \setminus Q_{rs}$ и P_{rs} — последний выбитый элемент при вставке j_m в $P(m-1)$.
  - Он выбит самым правым меньшим его элементом предыдущей строки и т.д. $\implies$ восстановим $P(m-1)$ и j_m.
  - Итого: восстановили $(P(m-1), Q(m-1))$ и (i_m, j_m). Далее по индукции.
- Сюръективность.
  - Надо: описанная выше процедура дает корректную w_A.
  - Очевидно, $i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_m$. Надо: $i_k = i_{k+1} \implies j_k \le j_{k+1}$.
  - Пусть $i_k = Q_{rs}$, $i_{k+1} = Q_{uv} \implies r \ge u$, $s < v$.
    Когда «обратно выбиваем» P_{uv}, он в конце строки $\implies$ «обратный путь вставки» P_{rs} пересекает строку u строго левее столбца $v \implies$
  - Весь обратный путь вставки P_{rs} лежит строго левее пути для P_{uv} $\implies$ в частности, $j_k \le j_{k+1}$.

- A — перестановочная $\iff$ $\mathrm{col}(A) = \mathrm{row}(A) = (1^n)$ $\iff$ $P, Q \in \mathrm{SYT}$.

Следствие

- $\mathrm{RSK} : \mathfrak{S}_n \to \{$*пары* SYT *одинаковой формы*$\}$ — *биекция.*
- $\boxed{\sum_{\lambda \vdash n} (\dim \lambda)^2 = n!}$.

- A — перестановочная $\iff \mathrm{col}(A) = \mathrm{row}(A) = (1^n) \iff P, Q \in \mathrm{SYT}$.

Следствие

- $\mathrm{RSK} : \mathfrak{S}_n \to \{$*пары* SYT *одинаковой формы*$\}$ — *биекция.*
- $\boxed{\sum_{\lambda \vdash n} (\dim \lambda)^2 = n!}$.

Оказывается, RSK для произвольных матриц сводится к RSK для перестановок.

Стандартизация

- Стандартизация $w_A \mapsto \widetilde{w}_A \in \mathfrak{S}_n$: первую строку меняем на $1, \ldots, n$, а во второй нумеруем последовательно все 1 слева направо, все 2 слева направо и т.д.

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Лемма

Стандартизация коммутирует с RSK: $(P, Q) = \mathrm{RSK}(w_A)$ *получается «обратной перенумерацией»* $(\widetilde{P}, \widetilde{Q}) = \mathrm{RSK}(\widetilde{w}_A)$.

Стандартизация

- **Стандартизация** $w_A \mapsto \widetilde{w}_A \in \mathfrak{S}_n$: первую строку меняем на $1, \dots, n$, а во второй нумеруем последовательно все 1 слева направо, все 2 слева направо и т.д.

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Лемма

Стандартизация коммутирует с RSK: $(P, Q) = \mathrm{RSK}(w_A)$ получается «обратной перенумерацией» $(\widetilde{P}, \widetilde{Q}) = \mathrm{RSK}(\widetilde{w}_A)$.

Доказательство.

- Пусть j вставляется в строку k. Если заменить его на большее число j', которое меньше всех элементов этой строки, больших j, то j' вставилось бы туда же.
- Таким образом, процедура вставки стандартизованной последовательности полностью повторяет процедуру вставки для исходной последовательности.

Стандартизация

- Стандартизация $w_A \mapsto \widetilde{w}_A \in \mathfrak{S}_n$: первую строку меняем на $1, \dots, n$, а во второй нумеруем последовательно все 1 слева направо, все 2 слева направо и т.д.

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{w}_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 9 & 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Лемма

Стандартизация коммутирует с RSK: $(P, Q) = \mathrm{RSK}(w_A)$ получается «обратной перенумерацией» $(\widetilde{P}, \widetilde{Q}) = \mathrm{RSK}(\widetilde{w}_A)$.

(★) Убедитесь на примере.

Следствия алгоритма RSK: тождество Коши

Теорема (тождество Коши)

$$\boxed{\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y)}.$$

Следствия алгоритма RSK: тождество Коши

Теорема (тождество Коши)

$$\boxed{\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y)}.$$

Доказательство.

- $\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \prod_{i,j}\left[\sum_{a_{ij}\geq 0}(x_i y_j)^{a_{ij}}\right].$
- Слагаемое $x^\alpha y^\beta \leftrightarrow A^T \in \mathcal{M}^{\geq 0}$: $\mathrm{row}(A) = \alpha$, $\mathrm{col}(A) = \beta$ $\implies [x^\alpha y^\beta](\text{л.ч.}) = N_{\alpha\beta}$.
- $[x^\alpha y^\beta](\text{п.ч.}) =$ число пар (P, Q) SSYT одинаковой формы: $\mathrm{type}(P) = \alpha$, $\mathrm{type}(Q) = \beta$.
- RSK устанавливает биекцию!

Следствия алгоритма RSK: тождество Коши

Теорема (тождество Коши)

$$\boxed{\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \sum_{\lambda} s_\lambda(x) s_\lambda(y)}.$$

Следствие

$\{s_\lambda\}$ — *ортонормированный базис* Λ.

Следствие

$$\sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda\mu} K_{\lambda\nu} = N_{\mu\nu} = \langle h_\mu, h_\nu \rangle.$$

Доказательство: рассмотреть $[x^\mu y^\nu]$ в обеих частях тождества Коши.

Следствия алгоритма RSK

Следствие

$$\sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda\mu} K_{\lambda\nu} = N_{\mu\nu} = \langle h_\mu, h_\nu \rangle.$$

Доказательство: рассмотреть $[x^\mu y^\nu]$ в обеих частях тождества Коши.

Следствие

$$h_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda\mu} s_\lambda, \text{ т.е. } M(h,s) = M(s,m)^T.$$

Доказательство: $h_\mu = \sum_\lambda a_{\lambda\mu} s_\lambda \implies a_{\lambda\mu} = \langle h_\mu, s_\lambda \rangle$. Но $\langle h_\mu, m_\nu \rangle = \delta_{\mu\nu}$, $s_\lambda = \sum_\mu K_{\lambda\mu} m_\mu \implies \langle h_\mu, s_\lambda \rangle = K_{\lambda\mu}$.

Следствия алгоритма RSK

Следствие

$$\boxed{h_1^n = \sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \cdot s_\lambda}.$$

Доказательство: $h_1^n = h_{(1^n)} = \sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda,(1^n)} s_\lambda$.