Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 5. Симметрия алгоритма RSK. Задача Улама

Н. В. Цилевич

8 октября 2021 г.

Симметрия алгоритма RSK

Теорема

$\mathrm{RSK}(A) = (P, Q) \implies \mathrm{RSK}(A^T) = (Q, P).$

Симметрия алгоритма RSK

Теорема

$\mathrm{RSK}(A) = (P, Q) \implies \mathrm{RSK}(A^T) = (Q, P).$

- $w_A = \binom{u}{v} \implies w_{A^T} = \binom{v}{u}_{\text{сорт.}}$.

Симметрия алгоритма RSK

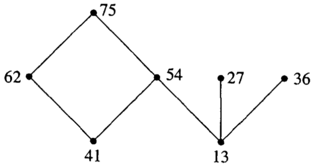
Теорема

$\mathrm{RSK}(A) = (P, Q) \implies \mathrm{RSK}(A^T) = (Q, P)$.

- $w_A = \binom{u}{v} \implies w_{A^T} = \binom{v}{u}_{\text{сорт.}}$.
- Стандартизация $\implies$ можно считать, что u, v не содержат повторяющихся элементов, так как стандартизация коммутирует с переходом к $\binom{v}{u}_{\text{сорт.}}$.

- Ч.у.м. $I = I(A) = I\binom{u}{v}$:
  - элементы — столбцы массива $\binom{u}{v}$,
  - $\binom{a}{b} < \binom{c}{d} \iff a < c$ и $b < d$.

$$\binom{u}{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

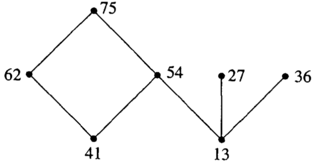


- ($\bigstar$) Число несравнимых элементов в I = число инверсий перестановки v.

Инверсионное ч.у.м.

- Ч.у.м. $I = I(A) = I\binom{u}{v}$:
  - элементы — столбцы массива $\binom{u}{v}$,
  - $\binom{a}{b} < \binom{c}{d} \iff a < c$ и $b < d$.

$$\binom{u}{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$



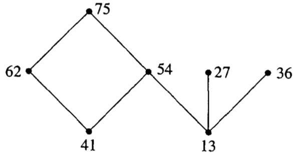
- (★) Число несравнимых элементов в I = число инверсий перестановки v.

Лемма

$\phi : I(A) \to I(A^T)$, где $\phi\binom{a}{b} = \binom{b}{a}$, — изоморфизм ч.у.м.

Доказательство: очевидно (почему?).

- $I_1 := \{\text{мин. эл-ты } I\}$,
  $I_2 := \{\text{мин. эл-ты } I \setminus I_1\}$,
  $I_3 := \{\text{мин. эл-ты } I \setminus (I_1 \cup I_2)\}$,
  $\dots$
  I_d.



$$I_1 = \{\tbinom{1}{3}, \tbinom{4}{1}\},\ I_2 = \{\tbinom{2}{7}, \tbinom{3}{6}, \tbinom{5}{4}, \tbinom{6}{2}\},\ I_3 = \{\tbinom{7}{5}\}.$$

- I_i — антицепь (размера $n_i = \#I_i$) $\implies$ можно занумеровать ее элементы так:
$$\begin{pmatrix} u_{i1} \\ v_{i1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{i2} \\ v_{i2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_{in_i} \\ v_{in_i} \end{pmatrix},$$
где $u_{i1} < u_{i2} < \dots < u_{in_i}$, $v_{i1} > v_{i2} > \dots > v_{in_i}$.

- I_i — антицепь (размера $n_i = \#I_i$) $\implies$ можно занумеровать ее элементы так:
$$\binom{u_{i1}}{v_{i1}}, \binom{u_{i2}}{v_{i2}}, \ldots, \binom{u_{in_i}}{v_{in_i}},$$
где $u_{i1} < u_{i2} < \cdots < u_{in_i}$, $v_{i1} > v_{i2} > \cdots > v_{in_i}$.

Лемма

$\mathrm{RSK}(A) = (P, Q) \implies$

- *Первая строка P-таблицы есть $v_{1n_1} v_{2n_2} \cdots v_{dn_d}$.*
- *Первая строка Q-таблицы есть $u_{11} u_{21} \cdots u_{d1}$.*
- $\binom{u_k}{v_k} \in I_i \implies$ *v_k вставляется в i-й столбец первой строки таблицы $P(k-1)$.*

Доказательство леммы

- Индукция по n. База $n = 1$ тривиальна.
- Переход $n - 1 \to n$. Пусть $\binom{u'}{v'} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} \end{pmatrix}$, $I_i' := I_i\binom{u'}{v'}$, $1 \leq i \leq e$ (где $e = d - 1$ или $e = d$), $\# I_i' = m_i$.

Доказательство леммы

- Индукция по n. <u>База</u> $n = 1$ тривиальна.
- <u>Переход</u> $n-1 \to n$. Пусть $\binom{u'}{v'} = \binom{u_1\ u_2\ \cdots\ u_{n-1}}{v_1\ v_2\ \cdots\ v_{n-1}}$, $I_i' := I_i\binom{u'}{v'}$, $1 \leq i \leq e$ (где $e = d-1$ или $e = d$), $\#I_i' = m_i$.
- По предп. инд. первая строка $P(n-1)$ есть $v'_{1m_1} v'_{2m_2} \cdots v'_{em_e}$, а первая строка $Q(n-1)$ есть $u'_{11} u'_{21} \cdots u'_{e1}$.

Доказательство леммы

- Индукция по n. База $n = 1$ тривиальна.
- Переход $n-1 \to n$. Пусть $\binom{u'}{v'} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} \end{pmatrix}$, $I'_i := I_i\binom{u'}{v'}$, $1 \leq i \leq e$ (где $e = d-1$ или $e = d$), $\#I'_i = m_i$.
- По предп. инд. первая строка $P(n-1)$ есть $v'_{1m_1} v'_{2m_2} \cdots v'_{em_e}$, а первая строка $Q(n-1)$ есть $u'_{11} u'_{21} \cdots u'_{e1}$.
- Рассмотрим $P(n-1) \leftarrow v_n$.
  - Если $v_n < v'_{im_i}$, то $I'_i \cup \binom{u_n}{v_n}$ — антицепь в $I\binom{u}{v} \implies \binom{u_n}{v_n} \in I_i\binom{u}{v}$, где i — наименьший индекс, такой, что $v'_{im_i} > v_n$.
  - Если такого i нет, то $I_d\binom{u}{v} = \{\binom{u_n}{v_n}\}$.

Доказательство леммы

- Индукция по n. <u>База</u> $n = 1$ тривиальна.
- <u>Переход</u> $n-1 \to n$. Пусть $\binom{u'}{v'} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-1} \end{pmatrix}$, $I'_i := I_i\binom{u'}{v'}$, $1 \le i \le e$ (где $e = d-1$ или $e = d$), $\# I'_i = m_i$.
- По предп. инд. первая строка $P(n-1)$ есть $v'_{1m_1} v'_{2m_2} \cdots v'_{em_e}$, а первая строка $Q(n-1)$ есть $u'_{11} u'_{21} \cdots u'_{e1}$.
- Рассмотрим $P(n-1) \leftarrow v_n$.
  - Если $v_n < v'_{im_i}$, то $I'_i \cup \binom{u_n}{v_n}$ — антицепь в $I\binom{u}{v} \implies \binom{u_n}{v_n} \in I_i\binom{u}{v}$, где i — наименьший индекс, такой, что $v'_{im_i} > v_n$.
  - Если такого i нет, то $I_d\binom{u}{v} = \{\binom{u_n}{v_n}\}$.
- Вывод: v_n вставляется в i-й столбец таблицы $P(n-1)$.
- Это новый столбец $\iff v_n = v_{d1}$. Но тогда $u_n = u_{d1}$ и u_n вставляется в d-й столбец первой строки таблицы $Q(n-1)$.

Доказательство теоремы

- $I_i\binom{u}{v} = \left\{\binom{u_{i1}}{v_{i1}}, \binom{u_{i2}}{v_{i2}}, \ldots, \binom{u_{im_i}}{v_{im_i}}\right\} \implies I_i\binom{v}{u} = \left\{\binom{v_{im_i}}{u_{im_i}}, \ldots, \binom{v_{i2}}{u_{i2}}, \binom{v_{i1}}{u_{i1}}\right\}.$

Доказательство теоремы

- $I_i\binom{u}{v} = \{\binom{u_{i1}}{v_{i1}}, \binom{u_{i2}}{v_{i2}}, \ldots, \binom{u_{im_i}}{v_{im_i}}\} \implies I_i\binom{v}{u} = \{\binom{v_{im_i}}{u_{im_i}}, \ldots, \binom{v_{i2}}{u_{i2}}, \binom{v_{i1}}{u_{i1}}\}$.
- $\mathrm{RSK}(A^T) = \mathrm{RSK}(\binom{v}{u}_{\text{сорт.}})(P', Q') \implies$
  - первая строка P' есть $u_{11}u_{21}\cdots u_{d1}$ = первая строка Q,
  - первая строка Q' есть $v_{1m_1}v_{2m_2}\cdots v_{dm_d}$ = первая строка P.

Итого, для первых строк всё OK.

Доказательство теоремы

- $I_i\binom{u}{v} = \{\binom{u_{i1}}{v_{i1}}, \binom{u_{i2}}{v_{i2}}, \ldots, \binom{u_{im_i}}{v_{im_i}}\} \implies I_i\binom{v}{u} = \{\binom{v_{im_i}}{u_{im_i}}, \ldots, \binom{v_{i2}}{u_{i2}}, \binom{v_{i1}}{u_{i1}}\}$.
- $\mathrm{RSK}(A^T) = \mathrm{RSK}(\binom{v}{u}_{\text{сорт.}})(P', Q') \implies$
  - первая строка P' есть $u_{11}u_{21}\cdots u_{d1}$ = первая строка Q,
  - первая строка Q' есть $v_{1m_1}v_{2m_2}\cdots v_{dm_d}$ = первая строка P.
- v_{ij}, $1 \le j < m_i$, выбивается во 2-ю строку раньше v_{rs}, $1 \le s < m_r$, $\iff$ $u_{i,j+1} < u_{r,s+1}$ (так как v_{qt} выбивается элементом $v_{q,t+1}$).

Доказательство теоремы

- $I_i\binom{u}{v} = \{\binom{u_{i1}}{v_{i1}}, \binom{u_{i2}}{v_{i2}}, \ldots, \binom{u_{im_i}}{v_{im_i}}\} \implies I_i\binom{v}{u} = \{\binom{v_{im_i}}{u_{im_i}}, \ldots, \binom{v_{i2}}{u_{i2}}, \binom{v_{i1}}{u_{i1}}\}$.
- $\mathrm{RSK}(A^T) = \mathrm{RSK}(\binom{v}{u}_{\text{сорт.}})(P', Q') \implies$
  - первая строка P' есть $u_{11}u_{21}\cdots u_{d1}$ = первая строка Q,
  - первая строка Q' есть $v_{1m_1}v_{2m_2}\cdots v_{dm_d}$ = первая строка P.
- v_{ij}, $1 \le j < m_i$, выбивается во 2-ю строку раньше v_{rs}, $1 \le s < m_r$, $\iff u_{i,j+1} < u_{r,s+1}$ (так как v_{qt} выбивается элементом $v_{q,t+1}$).
- Обозначим
  - $(\bar{P}, \bar{Q})$ = таблицы (P, Q) без первых строк;
  - $(\bar{P}', \bar{Q}')$ = таблицы (P', Q') без первых строк.

Доказательство теоремы

- $I_i\binom{u}{v} = \left\{\binom{u_{i1}}{v_{i1}}, \binom{u_{i2}}{v_{i2}}, \ldots, \binom{u_{im_i}}{v_{im_i}}\right\} \implies I_i\binom{v}{u} = \left\{\binom{v_{im_i}}{u_{im_i}}, \ldots, \binom{v_{i2}}{u_{i2}}, \binom{v_{i1}}{u_{i1}}\right\}$.
- $\mathrm{RSK}(A^T) = \mathrm{RSK}(\binom{v}{u}_{\text{сорт.}})(P', Q') \implies$
  - первая строка P' есть $u_{11}u_{21}\cdots u_{d1}$ = первая строка Q,
  - первая строка Q' есть $v_{1m_1}v_{2m_2}\cdots v_{dm_d}$ = первая строка P.
- v_{ij}, $1 \le j < m_i$, выбивается во 2-ю строку раньше v_{rs}, $1 \le s < m_r$, $\iff$ $u_{i,j+1} < u_{r,s+1}$ (так как v_{qt} выбивается элементом $v_{q,t+1}$).
- Обозначим
  - $(\bar{P}, \bar{Q})$ = таблицы (P, Q) без первых строк;
  - $(\bar{P}', \bar{Q}')$ = таблицы (P', Q') без первых строк.
- $\binom{a}{b} := \begin{pmatrix} u_{12} & \cdots & u_{1m_1} & u_{22} & \cdots & u_{2m_2} & \cdots & u_{d2} & \cdots & u_{dm_d} \\ v_{11} & \cdots & v_{1,m_1-1} & v_{21} & \cdots & v_{2,m_2-1} & \cdots & v_{d1} & \cdots & v_{d,m_d-1} \end{pmatrix}_{\text{сорт.}}$
  $\implies \mathrm{RSK}\binom{a}{b} = (\bar{P}, \bar{Q})$.
- Аналогично
  $\binom{a'}{b'} := \begin{pmatrix} v_{1,m_1-1} & \cdots & v_{11} & v_{2,m_2-1} & \cdots & v_{21} & \cdots & v_{d,m_d-1} & \cdots & v_{d1} \\ u_{1m_1} & \cdots & u_{12} & u_{2m_2} & \cdots & u_{22} & \cdots & u_{dm_d} & \cdots & u_{d2} \end{pmatrix}_{\text{сорт.}}$
  $\implies \mathrm{RSK}\binom{a'}{b'} = (\bar{P}', \bar{Q}')$.
- $\binom{a}{b} = \binom{b'}{a'}_{\text{сорт.}} \implies$ QED по индукции.

Следствия симметрии RSK

Следствие

Пусть $\mathrm{RSK}(A) = (P, Q)$. *Тогда* A *симметрична* $\iff P = Q$.

Следствия симметрии RSK

Следствие

Пусть $\mathrm{RSK}(A) = (P, Q)$. *Тогда* A *симметрична* $\iff P = Q$.

Следствие

Пусть α *— слабое разложение и* $\mathrm{RSK}(A) = (P, Q)$. *Тогда* $A \to P$ *— биекция между симметричными матрицами из* $\mathcal{M}^{\geq 0}$ *с* $\mathrm{row}(A) = \alpha$ *и SSYT типа* α.

Следствия симметрии RSK

Следствие

Пусть $\mathrm{RSK}(A) = (P, Q)$. *Тогда* A *симметрична* $\iff P = Q$.

Следствие

Пусть α *— слабое разложение и* $\mathrm{RSK}(A) = (P, Q)$. *Тогда* $A \to P$ *— биекция между симметричными матрицами из* $\mathcal{M}^{\geq 0}$ *с* $\mathrm{row}(A) = \alpha$ *и SSYT типа* α.

Следствие

$\sum\limits_{\lambda \vdash n} \dim \lambda = \#\{w \in \mathfrak{S}_n : w^2 = e\}$, *т.е. общее число стандартных таблиц Юнга размера* n *равно числу инволюций в* $\mathfrak{S}_n$.

Доказательство. Матрица перестановки w симметрична $\iff w^2 = e$.

Следствия симметрии RSK

Следствие

$$\boxed{\prod_i (1-x_i)^{-1} \cdot \prod_{i<j} (1-x_i x_j)^{-1} = \sum_{\lambda\in\Pi} s_\lambda(x)}.$$

Доказательство.

- Л.ч. $= \prod_i \left(\sum_{a_{ii}=0}^{\infty} x_i^{a_{ii}} \right) \cdot \prod_{i<j} \left(\sum_{a_{ij}=0}^{\infty} (x_i x_j)^{a_{ij}} \right)$.
  Степень x_i равна $a_{ii} + \sum_{i<j} a_{ij} + \sum_{j<i} a_{ji} \implies$
  $[x^\alpha]$(л.ч.) $= \#\{A$ симметрична, $\mathrm{row}(A) = \alpha\}$,
- $[x^\alpha]$(п.ч.) $= \#\{$полустандартные таблицы типа $\alpha\}$.
- По первому следствию QED.

Отступление: возрастающие подпоследовательности

- $w = w_1 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n$. Возрастающая подпоследовательность в w: $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k}$, где $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ и $w_{i_1} < w_{i_2} < \cdots < w_{i_k}$.
- $L(w)$ — длина наибольшей возрастающей подпоследовательности.
- **Пример.** $w = 725481963 \implies L(w) = 4$.

Отступление: возрастающие подпоследовательности

- $w = w_1 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n$. Возрастающая подпоследовательность в w: $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k}$, где $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ и $w_{i_1} < w_{i_2} < \cdots < w_{i_k}$.
- $L(w)$ — длина наибольшей возрастающей подпоследовательности.
- **Пример.** $w = 725481963 \implies L(w) = 4$.

Знаменитая задача Улама: найти асимптотику $L(w_n)$ при $n \to \infty$, где w_n равномерно распределена на $\mathfrak{S}_n$.

Отступление: возрастающие подпоследовательности

- $w = w_1 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n$. Возрастающая подпоследовательность в w: $w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_k}$, где $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ и $w_{i_1} < w_{i_2} < \cdots < w_{i_k}$.
- $L(w)$ — длина наибольшей возрастающей подпоследовательности.
- **Пример.** $w = 725481963 \implies L(w) = 4$.

Знаменитая задача Улама: найти асимптотику $L(w_n)$ при $n \to \infty$, где w_n равномерно распределена на $\mathfrak{S}_n$.

- $w \in \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{RSK}(w) = (P, Q) \implies \mathrm{sh}(w) := \mathrm{sh}(P) = \mathrm{sh}(Q)$.

Теорема

$\mathrm{sh}(w) = \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \implies \boxed{\lambda_1 = L(w)}$.

Возрастающие подпоследовательности

- $r_i(w) :=$ самое правое число j в w: наибольшая возрастающая подпоследовательность с последним членом j имеет длину i (определено при $i \leq L(w)$).
- $1 = r_1(w) < r_2(w) < \cdots < r_{L(w)}(w)$.
- **Пример.** $w = 725481963 \implies r_1(w) = 1$, $r_2(w) = 3$, $r_3(w) = 6$, $r_4(w) = 9$.

Возрастающие подпоследовательности

- $r_i(w) :=$ самое правое число j в w: наибольшая возрастающая подпоследовательность с последним членом j имеет длину i (определено при $i \leq L(w)$).
- $1 = r_1(w) < r_2(w) < \cdots < r_{L(w)}(w)$.

Лемма

$w \in \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{RSK}(w) = (P, Q) \implies$ *первая строка* P *есть* $r_1(w), r_2(w), \ldots, r_{L(w)}(w)$.

Возрастающие подпоследовательности

- $r_i(w)$:= самое правое число j в w: наибольшая возрастающая подпоследовательность с последним членом j имеет длину i (определено при $i \leq L(w)$).
- $1 = r_1(w) < r_2(w) < \cdots < r_{L(w)}(w)$.

Лемма

$w \in \mathfrak{S}_n$, $\mathrm{RSK}(w) = (P, Q) \implies$ первая строка P есть $r_1(w), r_2(w), \ldots, r_{L(w)}(w)$.

Доказательство.

- Возрастающая подпоследовательность $w_{i_1}, \ldots, w_{i_k} \leftrightarrow$ цепь $\binom{i_1}{w_{i_1}} < \cdots < \binom{i_k}{w_{i_k}}$ в $I(w) \implies$
- Антицепь I_j состоит в точности из элементов $\binom{i,}{w_i}$: наиб. возраст. подпосл., заканч. на w_i, имеет длину j.
- Для такого элемента макс. значение i по определению есть u_{jn_j}, а соотв. значение w_i равно $v_{jn_j} \implies v_{jn_j} = r_j(w) \implies$ QED.

Теорема

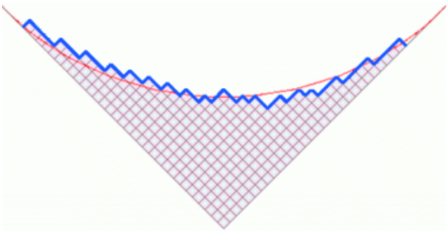
$\mathrm{sh}(w) = \lambda \implies \boxed{\lambda_1 = L(w)}$.

Тем самым задача Улама сводится к задаче о распределении длины первой строки растущей диаграммы Юнга относительно т.н. меры Планшереля, для которой $\mathrm{Prob}(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}$ и переходные вероятности имеют вид $\mathrm{Prob}(\lambda, \mu) = \frac{\dim \mu}{(n+1) \dim \lambda}$, где $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n+1$.

Теорема (Вершик–Керов)

Для «типичной» перестановки w_n имеем $\frac{L(w_n)}{\sqrt{n}} \to 2$ при $n \to \infty$.

Предельная форма диаграмм Юнга относительно меры Планшереля (Вершик–Керов)



$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left[x \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \sqrt{4 - x^2}\right] & |x| \le 2 \\ |x| & |x| \ge 2 \end{cases}$$

- Итак, знаем, что такое λ_1. А как найти $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$?

- Итак, знаем, что такое λ_1. А как найти $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$?
- Может быть, $\lambda_2 =$ длина наибольшей возрастающей подпоследовательности, оставшейся после удаления возрастающей подпоследовательности длины λ_1?

- Итак, знаем, что такое λ_1. А как найти $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$?
- Может быть, $\lambda_2 =$ длина наибольшей возрастающей подпоследовательности, оставшейся после удаления возрастающей подпоследовательности длины λ_1?
- Нет! ($\bigstar$) Приведите пример. (Скажем, $w = 247951368$.)

- Итак, знаем, что такое λ_1. А как найти $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$?
- Может быть, $\lambda_2 =$ длина наибольшей возрастающей подпоследовательности, оставшейся после удаления возрастающей подпоследовательности длины λ_1?
- Нет! (★) Приведите пример. (Скажем, $w = 247951368$.)

Теорема

$\lambda_1 + \cdots + \lambda_i =$ длина наибольшей подпоследовательности в w, представимой в виде объединения i возрастающих подпоследовательностей.

- (★) Разобрать на примере выше.

- А что с убывающими подпоследовательностями?

- А что с убывающими подпоследовательностями?
- $w = w_1 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n \rightsquigarrow \mathrm{rev}(w) := w_n \dots w_1 \in \mathfrak{S}_n$.

Лемма

$\mathrm{RSK}(w) = (P, Q)$, $\mathrm{RSK}(\mathrm{rev}(w)) = (P^*, Q^*) \implies P^* = P^T$.

Замечание. Q^* тоже можно описать: $Q \mapsto Q^*$ — т.н. инволюция Шютценберже.

- А что с убывающими подпоследовательностями?
- $w = w_1 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n \rightsquigarrow \mathrm{rev}(w) := w_n \dots w_1 \in \mathfrak{S}_n$.

Лемма

$\mathrm{RSK}(w) = (P, Q)$, $\mathrm{RSK}(\mathrm{rev}(w)) = (P^*, Q^*) \implies P^* = P^T$.

Замечание. Q^* тоже можно описать: $Q \mapsto Q^*$ — т.н. инволюция Шютценберже.

Теорема

$\lambda'_1 + \dots + \lambda'_i$ = длина наибольшей подпоследовательности в w, представимой в виде объединения i убывающих подпоследовательностей.
В частности, λ'_1 = длина наибольшей убывающей подпоследовательности.

- ($\bigstar$) Разобрать на примере выше.