Теория представлений симметрических групп

Лекция 6. Векторы содержания. Основная теорема и её следствия

Н. В. Цилевич

8 октября 2021 г.

Векторы содержания

Определение (вектор содержания)

$\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ – **вектор содержания** $\iff$

(i) $a_1 = 0$;

(ii) $\{a_i - 1, a_i + 1\} \cap \{a_1, \ldots, a_{i-1}\} \neq \emptyset$ *для всех* $i > 1$;

(iii) *если* $a_i = a_j = a$ *при* $i < j$, *то* $\{a - 1, a + 1\} \subset \{a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}\}$.

Замечание. При выполнении условий (i) и (iii) можно заменить (ii) на

(ii') $\forall i > 1$:

- если $a_i > 0$, то $\exists j < i : a_j = a_i - 1$;
- если $a_i < 0$, то $\exists j < i : a_j = a_i + 1$.

Обозначение: $\mathrm{Cont}(n) \subset \mathbb{Z}^n$ – множество векторов содержания.

Теорема

$\mathrm{Spec}(n) \subset \mathrm{Cont}(n)$.

Теорема

$\mathrm{Spec}(n) \subset \mathrm{Cont}(n)$.

Доказательство. Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{Spec}(n)$. Надо: (i), (ii), (iii).

- $X_1 = 0 \implies a_1 = 0 \implies$ (i).

Теорема

$\mathrm{Spec}(n) \subset \mathrm{Cont}(n)$.

Доказательство. Пусть $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Spec}(n)$. Надо: (i), (ii), (iii).

- $X_1 = 0 \implies a_1 = 0 \implies$ (i).
- Проверим (ii) и (iii) индукцией по n. <u>База</u> $n = 2$. Имеем $X_2 = (1, 2) \implies a_2 = \pm 1 \implies$ (ii). Условие (iii) неактуально.

Теорема

$\mathrm{Spec}(n) \subset \mathrm{Cont}(n)$.

Доказательство. Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in \mathrm{Spec}(n)$. Надо: (i), (ii), (iii).

- $X_1 = 0 \implies a_1 = 0 \implies$ (i).
- Проверим (ii) и (iii) индукцией по n. <u>База</u> $n = 2$. Имеем $X_2 = (1, 2) \implies a_2 = \pm 1 \implies$ (ii). Условие (iii) неактуально.
- <u>Переход</u> к $n \geqslant 3$.
  - Если $a_n = a_{n-1} \pm 1$, то (ii) есть.
  - Иначе $(n-1, n)$ допустима для $\alpha \implies$ $(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n, a_{n-1}) \in \mathrm{Spec}(n) \implies$ $(a_1, \dots, a_{n-2}, a_n) \in \mathrm{Spec}(n-1) \implies$ $\{a_n - 1, a_n + 1\} \cap \{a_1, \dots, a_{n-2}\} \neq \emptyset \implies$ (ii).

  Осталось доказать (iii).

- Пусть $a_i = a_n = a$ при $i < n$. НУО i – максимальное, т.е. $a \notin \{a_{i+1}, \dots, a_{n-1}\}$. Предположим, что $a - 1 \notin \{a_{i+1}, \dots, a_{n-1}\}$ (для $a + 1$ аналогично).
- По предположению индукции $a + 1$ входит в $\{a_{i+1}, \dots, a_{n-1}\}$ не более 1 раза (иначе бы a входило тоже).
  - 0 раз $\implies$ $(a_i, \dots, a_n) = (a, *, \dots, *, a)$, где $* \neq a - 1, a, a + 1$, и допустимыми транспозициями можем получить $(\dots, a, a, \dots) \in \mathrm{Spec}(n)$, противоречие.
  - 1 раз $\implies$ $(a_i, \dots, a_n) = (a, *, \dots, *, a + 1, * \dots, *, a)$ и допустимыми транспозициями можем получить $(\dots, a, a + 1, a, \dots) \in \mathrm{Spec}(n)$, противоречие.

Отношение эквивалентности на $\mathrm{Cont}(n)$

Итого: доказали, что $\mathrm{Spec}(n) \subset \mathrm{Cont}(n)$; в частности, веса – целочисленные векторы.

Отношение эквивалентности на $\mathrm{Cont}(n)$

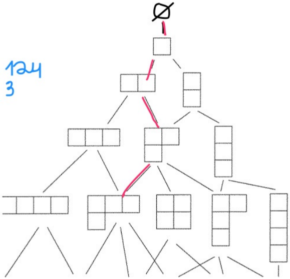
Итого: доказали, что $\mathrm{Spec}(n) \subset \mathrm{Cont}(n)$; в частности, веса – целочисленные векторы.

Теперь рассмотрим на $\mathrm{Cont}(n)$ отношение эквивалентности.

- Если $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{Cont}(n)$ и $a_i \neq a_{i+1} \pm 1$, то транспозиция s_i допустима для α.
- Отношение эквивалентности на $\mathrm{Cont}(n)$: $\alpha \approx_C \beta \iff$ получаются друг из друга последовательностью допустимых транспозиций.

Граф Юнга, таблицы Юнга (напоминание)

- Граф Юнга $\mathbb{Y}$: вершины n-го этажа – $\lambda \in \Pi_n$, ребро соединяет $\lambda \in \Pi_n$ и $\mu \in \Pi_{n+1}$ $\iff$ μ/λ состоит из 1 клетки.



- $\mathbb{T}(\lambda)$ = пути в графе Юнга от $\emptyset$ до λ.
- $\mathrm{SYT}(\lambda)$ = стандартные таблицы Юнга формы λ.
- Биекция $\mathbb{T}(\lambda) \leftrightarrow \mathrm{SYT}(\lambda)$:
  путь $(\emptyset \nearrow \lambda_1 \nearrow \ldots \nearrow \lambda_n) \leftrightarrow$ таблица: элемент i в клетке λ_i/λ_{i-1}.

Отношение эквивалентности на $\mathrm{SYT}(n)$

- $\mathrm{SYT}(n)$ – стандартные таблицы Юнга с n клетками.
- Транспозиция s_i допустима для $T \in \mathrm{SYT}(n) \iff i$ и $i+1$ в разных строках и столбцах.
- Отношение эквивалентности $\approx$ на $\mathrm{SYT}(n)$: $T_1 \approx T_2 \iff$ получаются друг из друга последовательностью допустимых транспозиций.
- Доказано: $T_1 \approx T_2 \iff T_1$ и T_2 имеют одинаковую форму.

Отношение эквивалентности на $\mathrm{SYT}(n)$

- $\mathrm{SYT}(n)$ – стандартные таблицы Юнга с n клетками.
- Транспозиция s_i допустима для $T \in \mathrm{SYT}(n) \iff i$ и $i+1$ в разных строках и столбцах.
- Отношение эквивалентности $\approx$ на $\mathrm{SYT}(n)$: $T_1 \approx T_2 \iff$ получаются друг из друга последовательностью допустимых транспозиций.
- Доказано: $T_1 \approx T_2 \iff T_1$ и T_2 имеют одинаковую форму.

Итого: у нас имеются три семейства множеств с отношениями эквивалентности на них:

$$(\mathrm{Spec}(n), \sim), \qquad (\mathrm{Cont}(n), \approx_C), \qquad (\mathrm{SYT}(n), \approx).$$

Содержание

Содержание клетки $\square = (i, j)$ диаграммы: $c(\square) = j - i$.

0	1	2	3
−1	0	1	
−2			

Содержание

Содержание клетки $\square = (i,j)$ диаграммы: $c(\square) = j - i$.

0	1	2	3
−1	0	1	
−2			

Определим отображение $\Phi : \mathrm{SYT}(n) \to \mathbb{Z}^n$:

$$\Phi : T = (\emptyset \nearrow \lambda_1 \nearrow \ldots \nearrow \lambda_n) \mapsto (c(\lambda_1), c(\lambda_2/\lambda_1), \ldots, c(\lambda_n/\lambda_{n-1})).$$

Пример:

1	2	4	7	8
3	5	6	9	
10				

$\Phi(T) = (0, 1, -1, 2, 0, 1, 3, 4, 2, -2)$.

Лемма

Φ – *биекция* $\mathrm{SYT}(n) \to \mathrm{Cont}(n)$, *переводящая* $\approx$ *в* $\approx_C$.

Лемма

Φ – *биекция* $\mathrm{SYT}(n) \to \mathrm{Cont}(n)$, *переводящая* $\approx$ *в* $\approx_C$.

Доказательство.

- Надо: $\Phi(T) \in \mathrm{Cont}(n)$, инъективность, сюръективность, эквивалентности.

Лемма

Φ – *биекция* $\mathrm{SYT}(n) \to \mathrm{Cont}(n)$, *переводящая* $\approx$ *в* $\approx_C$.

- Надо: $\Phi(T) \in \mathrm{Cont}(n)$, инъективность, сюръективность, эквивалентности.
- Докажем, что $\Phi(T) \in \mathrm{Cont}(n)$. Надо: условия (i), (ii), (iii).
  - (i) $a_1 = 0 \iff \lambda_1 = \square$.
  - (ii) $\{a_i - 1, a_i + 1\} \cap \{a_1, \ldots, a_{i-1}\} \neq \emptyset \iff$ новая клетка – ниже или правее какой-то старой.
  - (iii) если $a_i = a_j = a$ при $i < j$, то $\{a-1, a+1\} \subset \{a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}\}$ $\iff$ если диаграмма содержит две клетки на одной диагонали, то содержит клетку и левее, и выше нижней из них.

Лемма

Φ – *биекция* $\mathrm{SYT}(n) \to \mathrm{Cont}(n)$, *переводящая* $\approx$ *в* $\approx_C$.

- Надо: $\Phi(T) \in \mathrm{Cont}(n)$, инъективность, сюръективность, эквивалентности.
- Докажем, что $\Phi(T) \in \mathrm{Cont}(n)$. Надо: условия (i), (ii), (iii).
  - (i) $a_1 = 0 \iff \lambda_1 = \square$.
  - (ii) $\{a_i - 1, a_i + 1\} \cap \{a_1, \ldots, a_{i-1}\} \neq \emptyset \iff$ новая клетка – ниже или правее какой-то старой.
  - (iii) если $a_i = a_j = a$ при $i < j$, то $\{a - 1, a + 1\} \subset \{a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}\}$ $\iff$ если диаграмма содержит две клетки на одной диагонали, то содержит клетку и левее, и выше нижней из них.
- Инъективность: h-я диагональ содержит $i_1 < i_2 < \ldots < i_q$, где $a_{i_1}, \ldots, a_{i_q}$ – все элементы вектора содержаний, равные h.

- Сюръективность: индукция по n.
  База $n = 1$ и $n = 2$ очевидна.
  Переход. Пусть $\alpha \in \mathrm{Cont}(n)$. Тогда $\alpha' = (a_1, \ldots, a_{n-1}) = \Phi(T')$ для некоторой $T' \in \mathrm{SYT}(n-1)$ по предположению индукции.
  - Если $a_n \notin \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, то
    - либо $a_n - 1 \in \{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \implies$ поместим n в 1-ю строку,
    - либо $a_n + 1 \in \{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \implies$ поместим n в 1-й столбец.
  - Если $a_n \in \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, пусть $p = \max\{i : a_i = a_n\}$, и пусть p стоит в клетке (i, j).
    По (iii) $\exists r, s \in \{p+1, \ldots, n-1\}$: $a_r = a_n + 1$, $a_s = a_n - 1$. Тогда поместим n в клетку $(i+1, j+1)$.
- Эквивалентности: очевидно.

Следствие

$(\mathrm{Spec}(n), \sim) = (\mathrm{Cont}(n), \approx_C) = (\mathrm{SYT}(n), \approx).$

Следствие

$(\mathrm{Spec}(n), \sim) = (\mathrm{Cont}(n), \approx_C) = (\mathrm{SYT}(n), \approx).$

Доказательство.

- Второе равенство – лемма.

Следствие

$(\mathrm{Spec}(n), \sim) = (\mathrm{Cont}(n), \approx_C) = (\mathrm{SYT}(n), \approx)$.

- $\alpha \in \mathrm{Spec}(n)$, $\beta \in \mathrm{Cont}(n)$, $\alpha \approx_C \beta \implies \beta \in \mathrm{Spec}(n)$ и $\alpha \sim \beta$.
  - $\alpha \approx_C \beta \implies \beta$ получается из α допустимыми транспозициями. Понятия доп. транспозиций в $\mathrm{Cont}(n)$ и $\mathrm{Spec}(n)$ совпадают $\implies$ $\beta \in \mathrm{Spec}(n)$, так как доп. транспозиции не выводят из $\mathrm{Spec}(n)$.

Следствие

$(\mathrm{Spec}(n), \sim) = (\mathrm{Cont}(n), \approx_C) = (\mathrm{SYT}(n), \approx)$.

- $\alpha \in \mathrm{Spec}(n)$, $\beta \in \mathrm{Cont}(n)$, $\alpha \approx_C \beta \implies \beta \in \mathrm{Spec}(n)$ и $\alpha \sim \beta$.
  - $\alpha \approx_C \beta \implies \beta$ получается из α допустимыми транспозициями. Понятия доп. транспозиций в $\mathrm{Cont}(n)$ и $\mathrm{Spec}(n)$ совпадают $\implies$ $\beta \in \mathrm{Spec}(n)$, так как доп. транспозиции не выводят из $\mathrm{Spec}(n)$.
- Следствие: A – класс эквивалентности в $\mathrm{Spec}(n)$, B – класс эквивалентности в $\mathrm{Cont}(n)$ $\implies$ либо $A \cap B = \emptyset$, либо $B \subset A$. Иными словами, классы $\sim$ состоят из целых классов $\approx_C$.

Следствие

$(\mathrm{Spec}(n), \sim) = (\mathrm{Cont}(n), \approx_C) = (\mathrm{SYT}(n), \approx)$.

- $\alpha \in \mathrm{Spec}(n)$, $\beta \in \mathrm{Cont}(n)$, $\alpha \approx_C \beta \implies \beta \in \mathrm{Spec}(n)$ и $\alpha \sim \beta$.
  - $\alpha \approx_C \beta \implies \beta$ получается из α допустимыми транспозициями. Понятия доп. транспозиций в $\mathrm{Cont}(n)$ и $\mathrm{Spec}(n)$ совпадают $\implies \beta \in \mathrm{Spec}(n)$, так как доп. транспозиции не выводят из $\mathrm{Spec}(n)$.
- Следствие: A – класс эквивалентности в $\mathrm{Spec}(n)$, B – класс эквивалентности в $\mathrm{Cont}(n) \implies$ либо $A \cap B = \emptyset$, либо $B \subset A$. Иными словами, классы $\sim$ состоят из целых классов $\approx_C$.
- $\#(\mathrm{Spec}(n)/\sim) = \#\hat{\mathfrak{S}}_n = p(n)$.
- $\#(\mathrm{Cont}(n)/\approx_C) = (\#\,\mathrm{SYT}(n)/\approx) = p(n)$.
- Таким образом, число классов одинаково, а значит, они совпадают.

Основная теорема

Теорема (основная теорема)

Граф Юнга $\mathbb{Y}$ *есть граф ветвления неприводимых представлений симметрических групп!*

Основная теорема

Теорема (основная теорема)

Граф Юнга $\mathbb{Y}$ есть граф ветвления неприводимых представлений симметрических групп!

Доказательство.

- $(\mathrm{Spec}(n), \sim)$ описывает структуру графа ветвления неприводимых представлений:
  - вершины n-го этажа есть классы эквивалентности $(\mathrm{Spec}(n), \sim)$,
  - ребро соединяет $C' \in (\mathrm{Spec}(n-1), \sim)$ и $C'' \in (\mathrm{Spec}(n), \sim)$, если существует элемент $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in C''$, такой, что $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in C'$.
- $(\mathrm{SYT}(k), \approx)$ описывает структуру графа Юнга ровно в том же смысле.
- $(\mathrm{Spec}(k), \sim) = (\mathrm{SYT}(k), \approx) \implies$ QED.

Основная теорема

Теорема (основная теорема)

Граф Юнга $\mathbb{Y}$ есть граф ветвления неприводимых представлений симметрических групп!

Доказательство.

- $(\mathrm{Spec}(n), \sim)$ описывает структуру графа ветвления неприводимых представлений:
  - вершины n-го этажа есть классы эквивалентности $(\mathrm{Spec}(n), \sim)$,
  - ребро соединяет $C' \in (\mathrm{Spec}(n-1), \sim)$ и $C'' \in (\mathrm{Spec}(n), \sim)$, если существует элемент $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in C''$, такой, что $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in C'$.
- $(\mathrm{SYT}(k), \approx)$ описывает структуру графа Юнга ровно в том же смысле.
- $(\mathrm{Spec}(k), \sim) = (\mathrm{SYT}(k), \approx) \implies$ QED.

Ура!

Теорема (основная теорема)

Граф Юнга $\mathbb{Y}$ есть граф ветвления неприводимых представлений симметрических групп!

Таким образом,

- Неприводимые представления $\mathfrak{S}_n$ параметризуются диаграммами Юнга с n клетками.
- $\Pi_n \ni \lambda \mapsto \pi_\lambda =$ неприводимое представление $\mathfrak{S}_n$, натянутое на векторы Юнга $\{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{Cont}(n)\text{, соотв. } \lambda}$.

Следствия основной теоремы

Следствие (размерности неприводимых представлений)

$\dim \pi_\lambda = \#\,\mathsf{SYT}(\lambda)$.

Следствия основной теоремы

Следствие (размерности неприводимых представлений)

$\dim \pi_\lambda = \#\,\mathrm{SYT}(\lambda)$.

Следствие (правило ветвления)

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \pi_\lambda = \bigoplus_{\mu \in \Pi_{n-1},\, \mu \nearrow \lambda} \pi_\mu, \qquad \mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \pi_\mu = \bigoplus_{\lambda \in \Pi_n,\, \mu \nearrow \lambda} \pi_\lambda.$$

Следствия основной теоремы

Следствие (размерности неприводимых представлений)

$\dim \pi_\lambda = \# \,\mathrm{SYT}(\lambda)$.

Следствие (правило ветвления)

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \pi_\lambda = \bigoplus_{\mu \in \Pi_{n-1},\, \mu \nearrow \lambda} \pi_\mu, \qquad \mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \pi_\mu = \bigoplus_{\lambda \in \Pi_n,\, \mu \nearrow \lambda} \pi_\lambda.$$

Следствие (представленческий смысл содержаний)

$\boxed{X_i v_T = c_T(i) v_T}$, *где* $c_T(i)$ *– содержание клетки таблицы* T*, содержащей число* i.

Таким образом, содержания – это собственные числа YJM-элементов на базисе Юнга.

Следствие

Пусть $0 \leqslant k < n$, $\lambda \in \Pi_n$, $\mu \in \Pi_k$. *Обозначим* $m_{\mu,\lambda} := \langle \pi_\mu, \operatorname{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_k} \pi_\lambda \rangle$. *Тогда*

$$m_{\mu,\lambda} = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu \not\subset \lambda, \\ \text{число путей в } \mathbb{Y} \text{ от } \mu \text{ до } \lambda, & \text{если } \mu \subset \lambda. \end{cases}$$

В частности, $m_{\mu,\lambda} \leqslant (n-k)!$ *(и оценка точная).*

Доказательство.

- Первая часть – по определению.
- Число путей в $\mathbb{Y}$ от μ до λ не больше числа способов добавить $n-k$ новых клеток к μ. Если их можно поставить в разные строки и столбцы, то число способов $= (n-k)!$, иначе меньше.

2-интервалы в графе Юнга

Пусть $\lambda \in \Pi_n$, $\mu \in \Pi_{n-2}$. Обозначим $m = \langle \pi_\mu, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-2}} \pi_\lambda \rangle$.

- Если $\mu \not\subset \lambda$, то $m = 0$.
- Если $\mu \subset \lambda$, то m равно 1 или 2.
  - $m = 1 \implies \exists!\, \nu \in \Pi_{n-1}$: $\mu \subset \nu \subset \lambda$.
    Соответствующий интервал в $\mathbb{Y}$ – <u>цепочка</u>.
    Клетки λ/μ – в одной строке или одном столбце.
    Это случаи $a_n = a_{n-1} \pm 1$. Соответственно, $s_{n-1} v_T = \pm v_T$.

$$\begin{tikzcd} \lambda \arrow[d] \\ \nu \arrow[d] \\ \mu \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \nu \arrow[dr] & & \eta \arrow[dl] \\ & \mu & \end{tikzcd}$$

2-интервалы в графе Юнга

Пусть $\lambda \in \Pi_n$, $\mu \in \Pi_{n-2}$. Обозначим $m = \langle \pi_\mu, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-2}} \pi_\lambda \rangle$.

- Если $\mu \not\subset \lambda$, то $m = 0$.
- Если $\mu \subset \lambda$, то m равно 1 или 2.
  - $m = 1 \implies \exists!\, \nu \in \Pi_{n-1}$: $\mu \subset \nu \subset \lambda$.
    Соответствующий интервал в $\mathbb{Y}$ – <u>цепочка</u>.
    Клетки λ/μ – в одной строке или одном столбце.
    Это случаи $a_n = a_{n-1} \pm 1$. Соответственно, $s_{n-1} v_T = \pm v_T$.
  - $m = 2 \implies \exists\, \nu, \eta \in \Pi_{n-1}$: $\mu \subset \nu, \eta \subset \lambda$.
    Соответствующий интервал в $\mathbb{Y}$ – <u>ромб</u>.
    Клетки λ/μ – в разных строках и столбцах.
    Действие s_{n-1} задаётся матрицами 2×2.

$$\begin{tikzcd} \lambda \arrow[d] \\ \nu \arrow[d] \\ \mu \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \lambda \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \nu \arrow[dr] & & \eta \arrow[dl] \\ & \mu & \end{tikzcd}$$

Подведём итог

- Неприводимые представления $\mathfrak{S}_n \leftrightarrow$ диаграммы Юнга с n клетками.
- $\dim \pi_\lambda = \#\,\mathsf{SYT}(\lambda)$.
- Граф ветвления неприводимых представлений = граф Юнга.
- Базис Юнга (собственный базис алгебры Гельфанда–Цетлина) параметризуется стандартными таблицами Юнга с n клетками.
- Спектр (= с.ч. на YJM-элементах) $\mathrm{Spec}(n)$ алгебры Гельфанда–Цетлина = мн-во векторов содержания $\mathrm{Cont}(n)$.
- Содержания клеток таблицы Юнга – это собственные числа YJM-элементов на соответствующем векторе Юнга.

Итак, мы построили фундамент теории представлений симметрических групп. Теперь будем её развивать.
Творческие планы:

- полунормальная и ортогональная форма Юнга (как действуют кокстеровские транспозиции в неприводимых представлениях);
- правило Мурнагана–Накаямы (как считать характеры);
- соответствие Фробениуса–Юнга (построение неприводимых представлений из индуцированных);
- формула Фробениуса для характеров;
- формула крюков (как считать размерности неприводимых представлений);
- двойственность Шура–Вейля (связь между представлениями симметрических и общих линейных групп).