Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 6. Двойственный алгоритм RSK и двойственное тождество Коши. Классическое определение функций Шура

Н. В. Цилевич

11 октября 2021 г.

Двойственный алгоритм RSK

- Двойственный алгоритм Робинсона–Шенстеда–Кнута RSK*:
  - применяется к матрицам из $\mathcal{M}^{0,1}$;
  - i выбивает самый левый элемент, **больший или равный** i.

$$w_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$P(i)$	$Q(i)$
1	1
1 3	1 1
1 2 3	1 1 2
1 2 1 3	1 1 2 3
1 2 3 1 3	1 1 3 2 3
1 2 3 1 3 3	1 1 3 2 4 3
1 2 3 1 2 3 3	1 1 3 2 4 3 5

Двойственный алгоритм RSK

- Двойственный алгоритм Робинсона–Шенстеда–Кнута RSK^*:
  - применяется к матрицам из $\mathcal{M}^{0,1}$;
  - i выбивает самый левый элемент, **больший или равный** i.
- Для перестановочных матриц $\mathrm{RSK} = \mathrm{RSK}^*$.
- В P-таблице элементы строго возрастают по строкам.

Двойственный алгоритм RSK

- Двойственный алгоритм Робинсона–Шенстеда–Кнута RSK*:
  - применяется к матрицам из $\mathcal{M}^{0,1}$;
  - i выбивает самый левый элемент, **больший или равный** i.
- Для перестановочных матриц RSK $=$ RSK*.
- В P-таблице элементы строго возрастают по строкам.

Теорема

- $\mathrm{RSK}^* : \mathcal{M}^{0,1} \to \{(P, Q)$ *одинаковой формы*, $P^T, Q \in \mathrm{SSYT}\}$ — *биекция;*
- $\mathrm{type}(P) = \mathrm{col}(A)$, $\mathrm{type}(Q) = \mathrm{row}(A)$.

Доказательство. Аналогично теореме про обычный RSK (★) .

Двойственный алгоритм RSK

- Двойственный алгоритм Робинсона–Шенстеда–Кнута RSK^*:
  - применяется к матрицам из $\mathcal{M}^{0,1}$;
  - i выбивает самый левый элемент, **больший или равный** i.

Теорема

- $\mathrm{RSK}^* : \mathcal{M}^{0,1} \to \{(P,Q)$ *одинаковой формы*, $P^T, Q \in \mathrm{SSYT}\}$ — *биекция;*
- $\mathrm{type}(P) = \mathrm{col}(A)$, $\mathrm{type}(Q) = \mathrm{row}(A)$.

Теорема (двойственное тождество Коши)

$$\boxed{\prod_{i,j}(1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda \in \Pi} s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y)}.$$

Доказательство. Аналогично прямому тождеству Коши (★) .

Теорема

$$\boxed{\omega s_\lambda = s_{\lambda'}}.$$

Теорема

$$\boxed{\omega s_\lambda = s_{\lambda'}}.$$

- ω_y — инволюция ω по переменным y.

Лемма

$\omega_y \prod (1 - x_i y_j)^{-1} = \prod (1 + x_i y_j)$.

Теорема

$$\boxed{\omega s_\lambda = s_{\lambda'}}.$$

- ω_y — инволюция ω по переменным y.

Лемма

$\omega_y \prod (1 - x_i y_j)^{-1} = \prod (1 + x_i y_j).$

Доказательство.

$$\omega_y \prod (1 - x_i y_j)^{-1} = \omega_y \sum_\lambda m_\lambda(x) h_\lambda(y) = \sum_\lambda m_\lambda(x) e_\lambda(y) = \prod (1 + x_i y_j).$$

Теорема

$$\boxed{\omega s_\lambda = s_{\lambda'}}.$$

Доказательство.

- $\sum_\lambda s_\lambda(x) s_{\lambda'}(y) = \prod(1 + x_i y_j) = \omega_y \prod(1 - x_i y_j)^{-1} = \omega_y \sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y)$ $= \sum_\lambda s_\lambda(x) \omega_y(s_\lambda(y))$.
- Рассмотрим $[s_\lambda(x)]$ в обеих частях. Поскольку $s_\lambda(x)$ линейно независимы, $s_{\lambda'}(y) = \omega_y\left(s_\lambda(y)\right)$, т.е. $s_{\lambda'} = \omega s_\lambda$.

Теорема

$$\boxed{\omega s_\lambda = s_{\lambda'}}.$$

Доказательство.

- $\sum\limits_\lambda s_\lambda(x)s_{\lambda'}(y) = \prod(1+x_iy_j) = \omega_y \prod(1-x_iy_j)^{-1} = \omega_y \sum\limits_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y)$ $= \sum\limits_\lambda s_\lambda(x)\omega_y(s_\lambda(y))$.
- Рассмотрим $[s_\lambda(x)]$ в обеих частях. Поскольку $s_\lambda(x)$ линейно независимы, $s_{\lambda'}(y) = \omega_y\left(s_\lambda(y)\right)$, т.е. $s_{\lambda'} = \omega s_\lambda$.

Упражнение. (★) Найти характеристический многочлен оператора $\omega\colon \Lambda^n \to \Lambda^n$.

Классическое определение функций Шура

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $w \in \mathfrak{S}_n \rightsquigarrow$
$$w(x^\alpha) = x_1^{\alpha_{w(1)}} \cdots x_n^{\alpha_{w(n)}}.$$
- $$a_\alpha = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(w) \cdot w(x^\alpha) = \det\left(x_i^{\alpha_j}\right)_{i,j=1}^n.$$

Классическое определение функций Шура

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $w \in \mathfrak{S}_n \rightsquigarrow$
$$w(x^\alpha) = x_1^{\alpha_{w(1)}} \cdots x_n^{\alpha_{w(n)}}.$$
-
$$a_\alpha = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(w) \cdot w(x^\alpha) = \det \left(x_i^{\alpha_j}\right)_{i,j=1}^n.$$
- a_α — кососимметрическая функция: $\sigma(a_\alpha) = \operatorname{sgn}(\sigma) a_\alpha$.
- Значит,
  - $a_\alpha = 0$, если не все α_i различны,
  - НУО $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_n \geq 0$.

Классическое определение функций Шура

- Рассмотрим лестничную диаграмму $\delta = \delta_n := (n-1, n-2, \ldots, 0)$.
- Тогда $\alpha = \lambda + \delta$, где $\lambda \in \Pi$, $\ell(\lambda) \leq n$, т.е. $\alpha_j = \lambda_j + n - j$ и

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=1}^n.$$

Классическое определение функций Шура

- Рассмотрим лестничную диаграмму $\delta = \delta_n := (n-1, n-2, \ldots, 0)$.
- Тогда $\alpha = \lambda + \delta$, где $\lambda \in \Pi$, $\ell(\lambda) \leq n$, т.е. $\alpha_j = \lambda_j + n - j$ и

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=1}^n.$$

- **Пример**: $a_{421} = a_{211+210} = \begin{vmatrix} x_1^4 & x_1^2 & x_1^1 \\ x_2^4 & x_2^2 & x_2^1 \\ x_3^4 & x_3^2 & x_3^1 \end{vmatrix}.$

Классическое определение функций Шура

- Рассмотрим лестничную диаграмму $\delta = \delta_n := (n-1, n-2, \dots, 0)$.
- Тогда $\alpha = \lambda + \delta$, где $\lambda \in \Pi$, $\ell(\lambda) \le n$, т.е. $\alpha_j = \lambda_j + n - j$ и

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=1}^n.$$

- В частности, $a_\delta = \det(x_i^{n-j}) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)$ — определитель Вандермонда.

Классическое определение функций Шура

- Рассмотрим лестничную диаграмму $\delta = \delta_n := (n-1, n-2, \ldots, 0)$.
- Тогда $\alpha = \lambda + \delta$, где $\lambda \in \Pi$, $\ell(\lambda) \leq n$, т.е. $\alpha_j = \lambda_j + n - j$ и

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=1}^n.$$

- В частности, $a_\delta = \det(x_i^{n-j}) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)$ — определитель Вандермонда.
- $a_\alpha = 0$ при $x_i = x_j \implies a_\alpha$ делится на $x_i - x_j$ в $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \implies a_\alpha$ делится на a_δ в $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \implies a_\alpha / a_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$.

Классическое определение функций Шура

- Рассмотрим лестничную диаграмму $\delta = \delta_n := (n-1, n-2, \dots, 0)$.
- Тогда $\alpha = \lambda + \delta$, где $\lambda \in \Pi$, $\ell(\lambda) \leq n$, т.е. $\alpha_j = \lambda_j + n - j$ и

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=1}^n.$$

- В частности, $a_\delta = \det(x_i^{n-j}) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)$ — определитель Вандермонда.
- $a_\alpha = 0$ при $x_i = x_j \implies a_\alpha$ делится на $x_i - x_j$ в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \implies a_\alpha$ делится на a_δ в $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] \implies a_\alpha / a_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$.
- $a_\alpha / a_\delta \in \Lambda_n^{|\lambda|}$ как отношение кососимметрических функций степеней α и δ.

Классическое определение функций Шура

- Рассмотрим лестничную диаграмму $\delta = \delta_n := (n-1, n-2, \ldots, 0)$.
- Тогда $\alpha = \lambda + \delta$, где $\lambda \in \Pi$, $\ell(\lambda) \leq n$, т.е. $\alpha_j = \lambda_j + n - j$ и

$$a_\alpha = a_{\lambda+\delta} = \det(x_i^{\lambda_j+n-j})_{i,j=1}^n.$$

- В частности, $a_\delta = \det(x_i^{n-j}) = \prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(x_i - x_j)$ — определитель Вандермонда.
- $a_\alpha = 0$ при $x_i = x_j \implies a_\alpha$ делится на $x_i - x_j$ в $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \implies a_\alpha$ делится на a_δ в $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n] \implies a_\alpha/a_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$.
- $a_\alpha/a_\delta \in \Lambda_n^{|\lambda|}$ как отношение кососимметрических функций степеней α и δ.

Что же это за симметрическая функция?

Теорема

$$\boxed{a_{\lambda+\delta}/a_{\delta} = s_{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Теорема

$\boxed{a_{\lambda+\delta}/a_\delta = s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)}$.

Доказательство.

- $h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda\mu} s_\lambda \implies e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} s_\lambda$.

Теорема

$\boxed{a_{\lambda+\delta}/a_\delta = s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)}$.

- $h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda\mu} s_\lambda \implies e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} s_\lambda$.
- Достаточно: $e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$, или $a_\delta e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} a_{\lambda+\delta}$, где всё – от n переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.

Теорема

$\boxed{a_{\lambda+\delta}/a_\delta = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)}$.

- $h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda\mu} s_\lambda \implies e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} s_\lambda$.
- Достаточно: $e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$, или $a_\delta e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} a_{\lambda+\delta}$, где всё – от n переменных $(x_1, \dots, x_n)$.
- Кососимметричность $\implies$ достаточно: $[x^{\lambda+\delta}] a_\delta e_\mu = K_{\lambda'\mu}$.

Теорема

$\boxed{a_{\lambda+\delta}/a_\delta = s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)}$.

- $h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda\mu} s_\lambda \implies e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} s_\lambda$.
- Достаточно: $e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$, или $a_\delta e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'\mu} a_{\lambda+\delta}$, где всё – от n переменных $(x_1, \ldots, x_n)$.
- Кососимметричность $\implies$ достаточно: $[x^{\lambda+\delta}]a_\delta e_\mu = K_{\lambda'\mu}$.
- Умножаем a_δ последовательно на $e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \ldots$. Каждое $a_\delta e_{\mu_1} \cdots e_{\mu_k}$ кососимметрично $\implies$ состоит из мономов $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ с различными i_j.

Теорема

$\boxed{a_{\lambda+\delta}/a_\delta = s_\lambda(x_1,\dots,x_n)}$.

- $h_\mu = \sum\limits_\lambda K_{\lambda\mu} s_\lambda \implies e_\mu = \sum\limits_\lambda K_{\lambda'\mu} s_\lambda$.
- Достаточно: $e_\mu = \sum\limits_\lambda K_{\lambda'\mu} \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta}$, или $a_\delta e_\mu = \sum\limits_\lambda K_{\lambda'\mu} a_{\lambda+\delta}$, где всё – от n переменных $(x_1,\dots,x_n)$.
- Кососимметричность $\implies$ достаточно: $[x^{\lambda+\delta}] a_\delta e_\mu = K_{\lambda'\mu}$.
- Умножаем a_δ последовательно на $e_{\mu_1}, e_{\mu_2}, \dots$. Каждое $a_\delta e_{\mu_1} \cdots e_{\mu_k}$ кососимметрично $\implies$ состоит из мономов $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ с различными i_j.
- При умножении такого $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$ на $x_{m_1} \cdots x_{m_j}$ из $e_{\mu_{k+1}}$ либо два показателя станут равными ($\implies$ слагаемое пропадёт), либо взаимный порядок показателей сохранится.

- Итого: чтобы получить $x^{\alpha+\delta}$, надо начать с x^{δ} в a_δ, умножить на $x^{\alpha^{(1)}}$ из e_{μ_1}, затем на $x^{\alpha^{(2)}}$ из e_{μ_2}, ... так, чтобы сохранялось строгое убывание показателей. Число способов это сделать $= [x^{\lambda+\delta}]a_\delta e_\mu$.

- Итого: чтобы получить $x^{\alpha+\delta}$, надо начать с x^δ в a_δ, умножить на $x^{\alpha^{(1)}}$ из e_{μ_1}, затем на $x^{\alpha^{(2)}}$ из e_{μ_2}, ... так, чтобы сохранялось строгое убывание показателей. Число способов это сделать $= [x^{\lambda+\delta}]a_\delta e_\mu$.
- Такому способу $\rightsquigarrow$ таблица $T = T(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots)$:
  - столбец j содержит $i \iff x_j$ содержится в $x^{\alpha^{(i)}}$.

Пример: $n = 4$, $\lambda = 5332$, $\lambda' = 44311$, $\lambda + \delta = 8542$, $\mu = 3222211$, $x^{\alpha^{(1)}} = x_1x_2x_3$, $x^{\alpha^{(2)}} = x_1x_2$, $x^{\alpha^{(3)}} = x_3x_4$, $x^{\alpha^{(4)}} = x_1x_2$, $x^{\alpha^{(5)}} = x_1x_4$, $x^{\alpha^{(6)}} = x_1$, $x^{\alpha^{(7)}} = x_3 \implies T =$

$$\begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 7 & \\ 5 & & & \\ 6 & & & \end{array}$$

- Итого: чтобы получить $x^{\alpha+\delta}$, надо начать с x^{δ} в a_{δ}, умножить на $x^{\alpha^{(1)}}$ из e_{μ_1}, затем на $x^{\alpha^{(2)}}$ из e_{μ_2}, ... так, чтобы сохранялось строгое убывание показателей. Число способов это сделать $= [x^{\lambda+\delta}]a_{\delta}e_{\mu}$.
- Такому способу $\rightsquigarrow$ таблица $T = T(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots)$:
  - столбец j содержит $i \iff x_j$ содержится в $x^{\alpha^{(i)}}$.
- $(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots) \mapsto T(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots)$ — биекция между способами получить $x^{\alpha+\delta}$ из x^{δ} и $\mathrm{SSYT}(\lambda', \mu)$:
  - j-й столбец имеет длину $\lambda_j \implies$ форма OK;
  - кратность i равна $|\alpha^{(i)}| = \mu_i \implies$ тип OK;
  - полустандартность – в силу условия на убывание показателей

$\implies$ QED.

Доказали: $e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda' \mu} s_\lambda$.

Следствие

$$\boxed{s_\nu e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'/\nu', \mu} s_\lambda}.$$

Следствие

$$\boxed{s_\nu e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'/\nu',\mu} s_\lambda}.$$

Доказательство.

- Пусть $s_\nu e_\mu = \sum_\lambda L^{\lambda'}_{\nu'\mu} s_\lambda \implies a_{\nu+\delta} e_\mu = \sum_\lambda L^{\lambda'}_{\nu'\mu} a_{\lambda+\delta}$.
- Как выше, $L^{\lambda'}_{\nu'\mu} =$ число способов представить $\lambda+\delta$ в виде $\lambda+\delta = \nu+\delta+\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(k)}$, где
  - $\ell(\mu) = k$,
  - $\alpha^{(i)}$ есть $(0,1)$-вектор с μ_i единицами,
  - координаты вектора $\nu+\delta+\alpha^{(1)}+\cdots+\alpha^{(i)}$ строго убывают для любого i.
- Определим $T = T(\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(k)}) \in \mathrm{SSYT}(\lambda'/\nu',\mu)$: i появляется в столбце $j \iff j$-я координата в α^i равна 1.
- Это биекция $\implies L^{\lambda'}_{\nu'\mu} = K_{\lambda'/\nu',\mu}$.

Теорема

$\boxed{\langle fs_\nu, s_\lambda \rangle = \langle f, s_{\lambda/\nu} \rangle \text{ для любой } f \in \Lambda}$.

В частности, $\boxed{\langle s_\mu s_\nu, s_\lambda \rangle = \langle s_\mu, s_{\lambda/\nu} \rangle}$.

Теорема

$\boxed{\langle fs_\nu, s_\lambda\rangle = \langle f, s_{\lambda/\nu}\rangle \text{ для любой } f \in \Lambda}$.

В частности, $\boxed{\langle s_\mu s_\nu, s_\lambda\rangle = \langle s_\mu, s_{\lambda/\nu}\rangle}$.

Доказательство.

- Линейность $\implies$ достаточно проверить на базисе. Например, $\{h_\mu\}$.
- $s_\nu e_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda'/\nu',\mu} s_\lambda \implies s_\nu h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda/\nu,\mu} s_\lambda \implies$ $\langle s_\nu h_\mu, s_\lambda\rangle = K_{\lambda/\nu,\mu}$.
- $\langle h_\mu, s_{\lambda/\nu}\rangle = \langle h_\mu, \sum_\eta K_{\lambda/\nu,\eta} m_\eta\rangle = K_{\lambda/\nu,\mu} \implies$ QED.

Теорема

$\boxed{\langle f s_\nu, s_\lambda \rangle = \langle f, s_{\lambda/\nu} \rangle \text{ для любой } f \in \Lambda}$.

В частности, $\boxed{\langle s_\mu s_\nu, s_\lambda \rangle = \langle s_\mu, s_{\lambda/\nu} \rangle}$.

Пример. Имеем: $s_1 s_{31} = s_{41} + s_{32} + s_{311}$ и $s_1 s_{22} = s_{32} + s_{221}$. Никакое другое произведение $s_1 s_\mu$ не содержит $s_{32} \implies s_{32/1} = s_{22} + s_{31}$.

Теорема

$$\boxed{\omega s_{\lambda/\nu} = s_{\lambda'/\nu'}}.$$

Теорема

$$\boxed{\omega s_{\lambda/\nu} = s_{\lambda'/\nu'}}.$$

Доказательство.

- $\langle s_\mu s_\nu, s_\lambda\rangle = \langle s_\mu, s_{\lambda/\nu}\rangle \implies \langle \omega(s_\mu s_\nu), \omega s_\lambda\rangle = \langle \omega s_\mu, \omega s_{\lambda/\nu}\rangle \implies \langle s_{\mu'} s_{\nu'}, s_{\lambda'}\rangle = \langle s_{\mu'}, \omega s_{\lambda/\nu}\rangle$.
- $\langle s_\mu s_\nu, s_\lambda\rangle = \langle s_\mu, s_{\lambda/\nu}\rangle \implies \langle s_{\mu'} s_{\nu'}, s_{\lambda'}\rangle = \langle s_{\mu'}, s_{\lambda'/\nu'}\rangle \implies$ QED.