Теория представлений симметрических групп

Лекция 7. Полунормальная и ортогональная форма Юнга

Н. В. Цилевич

15 октября 2021 г.

Напоминания

- Старшая таблица $T_\lambda^{\max}$ формы λ = заполняем по строкам.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	
10				

- $T \in \mathsf{SYT}(\lambda) \implies \exists!\, \sigma_T \in \mathfrak{S}_n : \sigma_T T = T_\lambda^{\max}$.
- $\ell(T) := \ell(\sigma_T)$ – кокстеровская длина; тогда T преобразуется в $T_\lambda^{\max}$ последовательностью из ℓ допустимых транспозиций.

Напоминания

- Старшая таблица $T_\lambda^{\max}$ формы λ = заполняем по строкам.
- $T \in \mathrm{SYT}(\lambda) \implies \exists!\, \sigma_T \in \mathfrak{S}_n : \sigma_T T = T_\lambda^{\max}$.
- $\ell(T) := \ell(\sigma_T)$ – кокстеровская длина; тогда T преобразуется в $T_\lambda^{\max}$ последовательностью из ℓ допустимых транспозиций.
- Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathrm{Spec}(n)$ и $\alpha' = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, a_{i+2}, \ldots, a_n) \in \mathrm{Spec}(n)$. Положим $v := (s_i - \frac{e}{a_{i+1}-a_i})v_\alpha$. Тогда v совпадает с $v_{\alpha'}$ (с точностью до константы) и в базисе $\{v_\alpha, v\}$ действие s_i задаётся матрицей

$$s_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{b-a} & 1 - \frac{1}{(b-a)^2} \\ 1 & -\frac{1}{b-a} \end{pmatrix},$$

где $a = a_i$, $b = a_{i+1}$.

Лемма

Положим $v_0 := v_{T_\lambda^{\max}}$. *Константы в базисе ГЦ можно выбрать так, чтобы для любой* $T \in \mathsf{SYT}(n)$

$$\sigma_T^{-1} v_0 = v_T + \sum_{R \in \mathsf{SYT}(\lambda)\colon \ell(\sigma_R) < \ell(\sigma_T)} c_R v_R,$$

где λ *– форма* T.

Лемма

Положим $v_0 := v_{T_\lambda^{\max}}$*. Константы в базисе ГЦ можно выбрать так, чтобы для любой* $T \in \mathrm{SYT}(n)$

$$\sigma_T^{-1} v_0 = v_T + \sum_{R \in \mathrm{SYT}(\lambda)\colon \ell(\sigma_R) < \ell(\sigma_T)} c_R v_R,$$

где λ *– форма* T*.*

Доказательство. Индукция по $\ell = \ell(\sigma_T)$.

- <u>База</u> $\ell = 1 \implies \sigma_T = s_i$ – допустимая транспозиция для $T \implies s_i^{-1} (= s_i)$ – допустимая транспозиция для $T_\lambda^{\max}$. Положим $v_T := (s_i^{-1} - \frac{e}{a_{i+1} - a_i}) v_0$. Тогда $s_i^{-1} v_0 = v_T + \frac{1}{a_{i+1} - a_i} v_0$, что и требовалось.

- Переход. Пусть $\sigma_T = s_{i_1} \ldots s_{i_{\ell-1}} s_j = \sigma_{T_1} s_j$, где $T_1 = s_j T$ и $\ell(T_1) = \ell - 1$. По предположению индукции

$$\sigma_{T_1}^{-1} v_0 = v_{T_1} + \sum_{\ell(\sigma_R)<\ell-1} c'_R v_R.$$

Но $T = s_j T_1 \implies$ положим $v_T := (s_j - \frac{e}{a_{i+1}-a_i}) v_{T_1} \implies$

$$s_j v_{T_1} = v_T + \frac{1}{a_{j+1} - a_j} v_{T_1}.$$

Тогда $\sigma_T^{-1} v_0 = s_j \sigma_{T_1}^{-1} v_0 = s_j v_{T_1} + s_j \sum_{\ell(\sigma_R)<\ell-1} c'_R v_R =$
$= v_T + \frac{1}{a_{j+1}-a_j} v_{T_1} + s_j \sum_{\ell(\sigma_R)<\ell-1} c'_R v_R \implies$ QED.

Теорема (полунормальная форма Юнга)

Пусть $\{v_T\}_{T \in \mathrm{SYT}(n)}$ *– базис из леммы. Фиксируем* $T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$ *и положим* $\alpha(T) = (a_1, \ldots, a_n)$*.*

(1) *Если* i *и* $i+1$ *в одной строке* T *(*$\iff a_{i+1} = a_i + 1$*), то* $s_i v_T = v_T$*.*

(2) *Если* i *и* $i+1$ *в одном столбце* T *(*$\iff a_{i+1} = a_i - 1$*), то* $s_i v_T = -v_T$*.*

(3) *Если* i *и* $i+1$ *в разных строках и столбцах* T *(*$\iff a_{i+1} \neq a_i \pm 1$*), положим* $S = s_i T$ *и* $r = a_{i+1} - a_i$*. Тогда в двумерном пространстве с базисом* $\{v_T, v_S\}$ *действие* s_i *задаётся следующей матрицей* A*:*

- *если* $\ell(S) = \ell(T) + 1$*, то* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 1 - \frac{1}{r^2} \\ 1 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$*;*
- *если* $\ell(S) = \ell(T) - 1$*, то* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 1 - \frac{1}{r^2} \\ 1 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}^T$*.*

Теорема (полунормальная форма Юнга)

Пусть $\{v_T\}_{T\in\mathrm{SYT}(n)}$ *– базис из леммы. Фиксируем* $T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$ *и положим* $\alpha(T) = (a_1, \ldots, a_n)$.

(1) *Если* i *и* $i+1$ *в одной строке* T ($\iff a_{i+1} = a_i + 1$), *то* $s_i v_T = v_T$.

(2) *Если* i *и* $i+1$ *в одном столбце* T ($\iff a_{i+1} = a_i - 1$), *то* $s_i v_T = -v_T$.

(3) *Если* i *и* $i+1$ *в разных строках и столбцах* T ($\iff a_{i+1} \neq a_i \pm 1$), *положим* $S = s_i T$ *и* $r = a_{i+1} - a_i$. *Тогда в двумерном пространстве с базисом* $\{v_T, v_S\}$ *действие* s_i *задаётся следующей матрицей* A:

- *если* $\ell(S) = \ell(T) + 1$, *то* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 1 - \frac{1}{r^2} \\ 1 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$;
- *если* $\ell(S) = \ell(T) - 1$, *то* $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 1 - \frac{1}{r^2} \\ 1 & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}^T$.

Следствие (рациональность неприводимых представлений $\mathfrak{S}_n$)

Все неприводимые представления $\mathfrak{S}_n$ *определены над* $\mathbb{Q}$.

Доказательство теоремы

- Пункты (1) и (2) доказаны ранее.

(3) Знаем: при некотором выборе констант формула именно такая. Надо: при нашем выборе. Пусть $\ell(S) = \ell(T) + 1$. Имеем $\sigma_S = \sigma_T s_i$ и $\sigma_T^{-1} v_0 = v_T + \sum\limits_{\ell(\sigma_R) < \ell(\sigma_T)} c_R v_R \implies$

$$\begin{aligned} \sigma_S^{-1} v_0 &= v_S + \sum_{\ell(\sigma_R) < \ell(\sigma_S)} c'_R v_R &= \\ s_i \sigma_T^{-1} v_0 &= s_i v_T + s_i \sum_{\ell(\sigma_R) < \ell(\sigma_T)} c_R v_R \end{aligned}$$

$\implies s_i v_T = v_S + \sum\limits_{\ell(\sigma_R) < \ell(\sigma_S)} c''_R v_R \implies$ именно при нашем выборе всё OK.

Случай $\ell(S) = \ell(T) - 1$ – аналогично ($\bigstar$) .

Нормировка базиса и осевое расстояние

- V^λ – пространство неприводимого представления π_λ.
- $\|\cdot\|_\lambda$ – скалярное произведение в V^λ, относительно которого π_λ унитарно.
- Нормируем ортогональный (почему?) базис $\{v_T\}_{T\in\mathrm{SYT}(\lambda)}$ в V^λ:

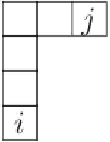
$$w_T := \frac{v_T}{\|v_T\|_\lambda}.$$

Нормировка базиса и осевое расстояние

- V^λ – пространство неприводимого представления π_λ.
- $\|\cdot\|_\lambda$ – скалярное произведение в V^λ, относительно которого π_λ унитарно.
- Нормируем ортогональный (почему?) базис $\{v_T\}_{T\in \mathrm{SYT}(\lambda)}$ в V^λ:

$$w_T := \frac{v_T}{\|v_T\|_\lambda}.$$

- Пусть $T \in \mathrm{SYT}(n)$ и $\alpha(T) = (a_1, \dots, a_n)$ – её вес (= вектор содержаний). Для $i, j \in [n]$ осевое (аксиальное) расстояние от j до i в T есть $r_{ij} := a_j - a_i = c_T(j) - c_T(i)$.
- **Пример:** $r_{ij} = 5$.



Ортогональная форма Юнга

Теорема (ортогональная форма Юнга)

В ортонормированном базисе $\{w_T\}_{T\in\mathsf{SYT}(n)}$ действие кокстеровских образующих задаётся формулой

$$\boxed{s_j w_T = \frac{1}{r} w_T + \sqrt{1-\frac{1}{r^2}}\, w_{s_j T}},$$

где $r = a_{j+1} - a_j$ – осевое расстояние от $j+1$ до j в T.

Замечание. В частности, если $a_{j+1} = a_j \pm 1$, то $s_j w_T = \pm w_T$.

Итого, матрица s_j в базисе $\{w_T, w_{s_j T}\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r} & \sqrt{1-\frac{1}{r^2}} \\ \sqrt{1-\frac{1}{r^2}} & -\frac{1}{r} \end{pmatrix} -$$

ортогональная форма Юнга.

Доказательство теоремы

Пусть $S = s_j T$. Предположим, что $\ell(\sigma_S) > \ell(\sigma_T)$. Тогда $s_j v_T = \frac{1}{r} v_T + v_S$ и

$$\begin{aligned} \|v_S\|^2 &= \|s_j v_T - \frac{1}{r} v_T\|^2 = \|s_j v_T\|^2 - \frac{2}{r}\langle s_j v_T, v_T\rangle + \frac{1}{r^2}\|v_T\|^2 = \\ &= \|v_T\|^2 - \frac{2}{r^2}\|v_T\|^2 + \frac{1}{r^2}\|v_T\|^2 = \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\|v_T\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $w_S = \frac{v_S}{\|v_T\|\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}}$, откуда

$$s_j w_T = \frac{s_j v_T}{\|v_T\|} = \frac{v_T}{r\|v_T\|} + \frac{v_S}{\|v_T\|} = \frac{1}{r} w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}\, w_S.$$

Случай $\ell(\sigma_S) < \ell(\sigma_T)$ – аналогично ($\star$) .

Примеры

- $\lambda = (n) \implies \exists$ ровно одна таблица $T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$:

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{n}$$

Имеем $\alpha(T) = (0, 1, \ldots, n-1) \implies a_{j+1} = a_j + 1$ для любого $j = 1, \ldots, n-1 \implies s_j w_T = w_T$ для любого $j \implies$ $\pi_{(n)} =$ тривиальное представление id_n.

Примеры

- $\lambda = (n) \implies \exists$ ровно одна таблица $T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & & & & & n \\ \hline\end{array}$$

  Имеем $\alpha(T) = (0, 1, \ldots, n-1) \implies a_{j+1} = a_j + 1$ для любого $j = 1, \ldots, n-1 \implies s_j w_T = w_T$ для любого $j \implies$ $\pi_{(n)}$ = тривиальное представление id_n.

- $\lambda = (1^n) \implies \exists$ ровно одна таблица $T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline n \\ \hline\end{array}$$

  Имеем $\alpha(T) = (0, -1, \ldots, -(n-1)) \implies a_{j+1} = a_j - 1$ для любого $j = 1, \ldots, n-1 \implies s_j w_T = -w_T$ для любого $j \implies$ $\pi_{(1^n)}$ = знаковое представление ε_n.

Лемма (об умножении на знаковое представление)

Для любой диаграммы λ

$$\boxed{\pi_{\lambda'} = \pi_\lambda \otimes \varepsilon_{\boldsymbol{n}}},$$

где λ' *– сопряжённая диаграмма.*

Лемма (об умножении на знаковое представление)

Для любой диаграммы λ

$$\boxed{\pi_{\lambda'} = \pi_\lambda \otimes \varepsilon_n},$$

где λ' *– сопряжённая диаграмма.*

Доказательство.

- $T \mapsto T'$ – биекция $\mathrm{SYT}(\lambda) \mapsto \mathrm{SYT}(\lambda')$.
- $\alpha(T') = -\alpha(T)$.
- Пусть $\phi : V^\lambda \mapsto V^{\lambda'}$ действует по формуле $\phi(w_T) = (-1)^{\ell(\sigma_T)} w_{T'}$. Из ортогональной формы Юнга следует, что это изоморфизм представлений $\pi_\lambda \otimes \varepsilon_n$ и $\pi_{\lambda'}$ (★) .

Примеры

Пусть $\lambda = (n-1, 1)$.

- Стандартные таблицы Юнга формы λ:

$$T_j = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 2 & & & & j-1 & j+1 & & & n \\
\hline
j \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

- $\alpha(T_j) = (0, 1, \ldots, j-2, -1, j-1, j, \ldots, n-1)$.
- ($\bigstar$) Выписать ортогональную форму Юнга для действия s_k на $w_j := w_{T_j}$, $j = 2, \ldots, n$.

Что же это за представление?

Примеры

Пусть $\lambda = (n-1, 1)$.

- Стандартные таблицы Юнга формы λ:

$$T_j = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & & & & j-1 & j+1 & & & n \\ \hline j \\ \cline{1-1}\end{array}$$

- $\alpha(T_j) = (0, 1, \ldots, j-2, -1, j-1, j, \ldots, n-1)$.
- ($\bigstar$) Выписать ортогональную форму Юнга для действия s_k на $w_j := w_{T_j}$, $j = 2, \ldots, n$.

Что же это за представление?

- $\dim \pi_{(n-1,1)} = n-1$.
- Правило ветвления: $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}} \pi_{(n-1,1)} = \pi_{(n-1)} + \pi_{(n-2,1)}$.

- Рассмотрим натуральное представление ρ_n группы $\mathfrak{S}_n$ в $\mathbb{C}^n$ перестановками координат.

- Рассмотрим натуральное представление ρ_n группы $\mathfrak{S}_n$ в $\mathbb{C}^n$ перестановками координат.
- $\mathbb{C}^n = V_0 \oplus V_1$ (инвариантные подпространства), где
  - $V_0 = \{(x, \ldots, x)\} \rightsquigarrow \rho_n|_{V_0} \simeq \pi_{(n)}$ – тривиальное представление.
  - $V_1 = \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\} \rightsquigarrow \rho_n|_{V_1} := \tilde{\rho}_n$.

- Рассмотрим натуральное представление ρ_n группы $\mathfrak{S}_n$ в $\mathbb{C}^n$ перестановками координат.
- $\mathbb{C}^n = V_0 \oplus V_1$ (инвариантные подпространства), где
  - $V_0 = \{(x, \ldots, x)\} \rightsquigarrow \rho_n|_{V_0} \simeq \pi_{(n)}$ – тривиальное представление.
  - $V_1 = \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\} \rightsquigarrow \rho_n|_{V_1} := \tilde{\rho}_n$.
- ρ_n получено из перестановочного действия $\mathfrak{S}_n$ на $[n] = \mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-1}$ $\Longrightarrow \rho_n = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \pi_{(n-1)}$ $(\bigstar)$.

- Рассмотрим натуральное представление ρ_n группы $\mathfrak{S}_n$ в $\mathbb{C}^n$ перестановками координат.
- $\mathbb{C}^n = V_0 \oplus V_1$ (инвариантные подпространства), где
  - $V_0 = \{(x, \ldots, x)\} \rightsquigarrow \rho_n|_{V_0} \simeq \pi_{(n)}$ – тривиальное представление.
  - $V_1 = \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\} \rightsquigarrow \rho_n|_{V_1} := \tilde{\rho}_n$.
- ρ_n получено из перестановочного действия $\mathfrak{S}_n$ на $[n] = \mathfrak{S}_n / \mathfrak{S}_{n-1}$ $\implies \rho_n = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \pi_{(n-1)}$ ($\bigstar$) .
- По правилу ветвления $\rho_n = \pi_{(n)} + \pi_{(n-1,1)}$.

- Рассмотрим натуральное представление ρ_n группы $\mathfrak{S}_n$ в $\mathbb{C}^n$ перестановками координат.
- $\mathbb{C}^n = V_0 \oplus V_1$ (инвариантные подпространства), где
  - $V_0 = \{(x, \ldots, x)\} \rightsquigarrow \rho_n|_{V_0} \simeq \pi_{(n)}$ – тривиальное представление.
  - $V_1 = \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\} \rightsquigarrow \rho_n|_{V_1} := \tilde{\rho}_n$.
- ρ_n получено из перестановочного действия $\mathfrak{S}_n$ на $[n] = \mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-1}$ $\Longrightarrow\ \rho_n = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \pi_{(n-1)}$ $(\bigstar)$.
- По правилу ветвления $\rho_n = \pi_{(n)} + \pi_{(n-1,1)}$.
- Таким образом, $\tilde{\rho}_n \simeq \pi_{(n-1,1)}$.

$\pi_{(n-1,1)}$ – стандартное представление $\mathfrak{S}_n$.

- Рассмотрим натуральное представление ρ_n группы $\mathfrak{S}_n$ в $\mathbb{C}^n$ перестановками координат.
- $\mathbb{C}^n = V_0 \oplus V_1$ (инвариантные подпространства), где
  - $V_0 = \{(x, \ldots, x)\} \rightsquigarrow \rho_n|_{V_0} \simeq \pi_{(n)}$ – тривиальное представление.
  - $V_1 = \{x \in \mathbb{C}^n : x_1 + \ldots + x_n = 0\} \rightsquigarrow \rho_n|_{V_1} := \tilde{\rho}_n$.
- ρ_n получено из перестановочного действия $\mathfrak{S}_n$ на $[n] = \mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_{n-1}$ $\Longrightarrow \rho_n = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n} \pi_{(n-1)}$ ($\bigstar$) .
- По правилу ветвления $\rho_n = \pi_{(n)} + \pi_{(n-1,1)}$.
- Таким образом, $\tilde{\rho}_n \simeq \pi_{(n-1,1)}$.

$\pi_{(n-1,1)}$ – стандартное представление $\mathfrak{S}_n$.

- Обозначим $\delta_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (единица на j-м месте) и $f_j := \delta_1 + \ldots + \delta_j$. Положим $\widetilde{w}_j := \frac{1}{\sqrt{j(j-1)}} f_{j-1} - \sqrt{\frac{j-1}{j}}\delta_j \in V_1$.
- ($\bigstar$) $\{\tilde{w}_j\}_{j=2,\ldots,n}$ — ортонормированный базис в V_1, и $w_j \mapsto \widetilde{w}_j$ — изоморфизм представлений.