Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 7. Коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона. Правило Пиери. Структура алгебры Хопфа на алгебре симметрических функций

Н. В. Цилевич

18 октября 2021 г.

Коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона

Определение

$c^{\lambda}_{\mu\nu} := \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle = \langle s_{\lambda/\nu}, s_\mu \rangle = \langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle$ – **коэффициент Литтлвуда–Ричардсона**.

Коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона

Определение

$c^{\lambda}_{\mu\nu} := \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle = \langle s_{\lambda/\nu}, s_\mu \rangle = \langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu \rangle$ – **коэффициент Литтлвуда–Ричардсона**.

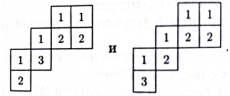
- $\boxed{s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c^{\lambda}_{\mu\nu} s_\lambda}$, т.е. $c^{\lambda}_{\mu\nu}$ — структурные константы умножения в базисе функций Шура.
- $\boxed{s_{\lambda/\nu} = \sum_\mu c^{\lambda}_{\mu\nu} s_\mu}$, $\boxed{s_{\lambda/\mu} = \sum_\nu c^{\lambda}_{\mu\nu} s_\nu}$.

Решёточные перестановки и обратные прочтения

- Решёточная перестановка — последовательность $a_1 \ldots a_n$: в любом подслове $a_1 \ldots a_j$ число букв i не меньше, чем число букв $i+1$.
- **Пример:** 11221312.

Решёточные перестановки и обратные прочтения

- Решёточная перестановка — последовательность $a_1 \dots a_n$: в любом подслове $a_1 \dots a_j$ число букв i не меньше, чем число букв $i+1$.
- **Пример:** 11221312.
- $T \in \mathrm{SSYT} \rightsquigarrow$ обратное прочтение $\mathrm{rr}(T)$: читаем справа налево сверху вниз.
- **Пример:** обратные прочтения для таблиц



суть 11221312 и 11221213 соответственно.

Коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона

Теорема (правило Литтлвуда–Ричардсона)

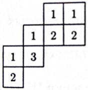
$c_{\mu\nu}^{\lambda} = \#\{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu, \nu)\colon\ \mathrm{rr}(T) \text{ – } \textit{решёточная перестановка}\}$.

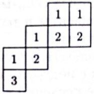
Коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона

Теорема (правило Литтлвуда–Ричардсона)

$c^{\lambda}_{\mu\nu} = \#\{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu, \nu)\colon\ \mathrm{rr}(T)$ – *решёточная перестановка*$\}$.

Пример (★) . $\lambda = (4,4,2,1)$, $\mu = (2,1)$, $\nu = (4,3,1)$ $\implies$ годятся



и


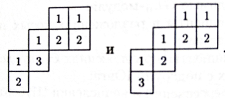
. $\implies$ $c^{\lambda}_{\mu\nu} = 2.$

Коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона

Теорема (правило Литтлвуда–Ричардсона)

$c^{\lambda}_{\mu\nu} = \#\{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu, \nu) : \ \mathrm{rr}(T)$ – *решёточная перестановка*$\}$.

Пример (★) . $\lambda = (4, 4, 2, 1)$, $\mu = (2, 1)$, $\nu = (4, 3, 1)$ $\Longrightarrow$ годятся



$\Longrightarrow$ $c^{\lambda}_{\mu\nu} = 2$.

Следствие

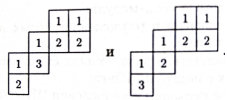
$c^{\lambda}_{\mu\nu}$ — *целое положительное число!*

Коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона

Теорема (правило Литтлвуда–Ричардсона)

$c^{\lambda}_{\mu\nu} = \#\{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu, \nu)\colon\ \mathrm{rr}(T)$ – *решёточная перестановка*$\}$.

Пример (★) . $\lambda = (4,4,2,1)$, $\mu = (2,1)$, $\nu = (4,3,1)$ $\implies$ годятся



$\implies c^{\lambda}_{\mu\nu} = 2.$

(★) $\langle s_{\lambda/\nu}, s_{\mu/\rho}\rangle$ — коэффициент Литтлвуда–Ричардсона.
(★) Произведение косых функций Шура — косая функция Шура.

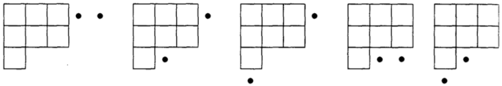
Коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона =

- коэффициенты разложения тензорных произведений представлений GL на неприводимые,
- коэффициенты разложения косых представлений $\mathfrak{S}_n$ на неприводимые,
- коэффициенты разложения представлений $\mathfrak{S}_n$, индуцированных с подгрупп Юнга, на неприводимые,
- числа пересечений в исчислении Шуберта на грассмановых многообразиях.

Горизонтальные и вертикальные полосы

Но в частном случае умножения на $s_{(n)}$ или $s_{(1^n)}$ можно получить формулу попроще!

- Горизонтальная (вертикальная) полоса = косая диаграмма: нет двух клеток в одном столбце (одной строке).



- $\mathrm{HS}(k)$, $\mathrm{VS}(k)$ — множество горизонтальных (вертикальных) полос размера k.

Горизонтальные и вертикальные полосы

- Горизонтальная (вертикальная) полоса = косая диаграмма: нет двух клеток в одном столбце (одной строке).
- $\mathrm{HS}(k)$, $\mathrm{VS}(k)$ — множество горизонтальных (вертикальных) полос размера k.
- $T \in \mathrm{SSYT}(\mu/\rho)$ с max эл-том $\leq m \leftrightarrow$ последовательность $\rho = \mu^0 \subseteq \mu^1 \subseteq \dots \subseteq \mu^m = \mu$, где $\mu^i/\mu^{i-1} \in \mathrm{HS}$: в клетки μ^i/μ^{i-1} ставим i.

Пример:

		2	2	3
	1	3		
1	4	4		
5				

Кто тут $\mu^{(i)}$?

Горизонтальные и вертикальные полосы

- Горизонтальная (вертикальная) полоса = косая диаграмма: нет двух клеток в одном столбце (одной строке).
- $\mathrm{HS}(k)$, $\mathrm{VS}(k)$ — множество горизонтальных (вертикальных) полос размера k.
- $T \in \mathrm{SSYT}(\mu/\rho)$ с max эл-том $\leq m \leftrightarrow$ последовательность $\rho = \mu^0 \subseteq \mu^1 \subseteq \cdots \subseteq \mu^m = \mu$, где $\mu^i/\mu^{i-1} \in \mathrm{HS}$: в клетки μ^i/μ^{i-1} ставим i.

Пример:

		2	2	3
	1	3		
1	4	4		
5				

$\rho = \mu^{(0)} = (21)$, $\mu^{(1)} = (2^2 1)$, $\mu^{(2)} = (421)$, $\mu^{(3)} = (531)$, $\mu^{(4)} = (53^2)$, $\mu^{(5)} = (53^2 1) = \mu$.

Правило Пиери

Теорема (правило Пиери)

$$s_\nu s_{(n)} = \boxed{s_\nu h_n = \sum_{\lambda\colon\, \lambda/\nu \in \mathrm{HS}(n)} s_\lambda}, \quad s_\nu s_{(1^n)} = \boxed{s_\nu e_n = \sum_{\lambda\colon\, \lambda/\nu \in \mathrm{VS}(n)} s_\lambda}.$$

Правило Пиери

Теорема (правило Пиери)

$$s_\nu s_{(n)} = \boxed{s_\nu h_n = \sum_{\lambda\colon \lambda/\nu \in \mathrm{HS}(n)} s_\lambda}, \; s_\nu s_{(1^n)} = \boxed{s_\nu e_n = \sum_{\lambda\colon \lambda/\nu \in \mathrm{VS}(n)} s_\lambda}.$$

Доказательство.

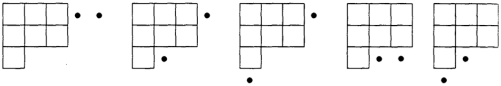
- $\langle s_\nu s_{(n)}, s_\lambda \rangle = \langle s_{(n)}, s_{\lambda/\nu} \rangle = \langle h_n, s_{\lambda/\nu} \rangle = K_{\lambda/\nu,(n)}$.
- По определению $K_{\lambda/\nu,(n)} = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda/\nu \in \mathrm{HS}(n), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$
- Второе тождество — применением ω.

Правило Пиери

Теорема (правило Пиери)

$$s_\nu s_{(n)} = \boxed{s_\nu h_n = \sum_{\lambda\colon \lambda/\nu \in \mathrm{HS}(n)} s_\lambda}, \quad s_\nu s_{(1^n)} = \boxed{s_\nu e_n = \sum_{\lambda\colon \lambda/\nu \in \mathrm{VS}(n)} s_\lambda}.$$

Пример. Пусть $\nu = 331$, $n = 2 \implies$ способы добавить горизонтальную 2-полосу:



$$\implies s_{331} h_2 = s_{531} + s_{432} + s_{4311} + s_{333} + s_{3321}.$$

Упражнения:

($\bigstar$) Разложите $s_{\lambda/(n)}$ по функциям Шура.

($\bigstar$) $\nu = \lambda/\mu \in \mathrm{HS} \implies s_{\lambda/\mu} = h_\nu = h_{\nu_1} h_{\nu_2} \ldots$, где ν_i — длины компонент. Аналогично (как именно?) для верт. полосы.

- $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ — кольцо формальных степенных рядов ограниченной степени от x и y, симметрических по x и по y по отдельности.
- $\{b_\mu(x)\}$ — базис в $\Lambda(x)$, а $\{c_\nu(y)\}$ — базис в $\Lambda(y) \Longrightarrow$ $\{b_\mu(x)c_\nu(y)\}$ — базис в $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$.

- $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ — кольцо формальных степенных рядов ограниченной степени от x и y, симметрических по x и по y по отдельности.
- $\{b_\mu(x)\}$ — базис в $\Lambda(x)$, а $\{c_\nu(y)\}$ — базис в $\Lambda(y) \Longrightarrow$ $\{b_\mu(x)c_\nu(y)\}$ — базис в $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$.
- $\Lambda(x, y) \subset \Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ — собственная (почему?) подалгебра формальных степенных рядов ограниченной степени, симметрических по x и y вместе.

- $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ — кольцо формальных степенных рядов ограниченной степени от x и y, симметрических по x и по y по отдельности.
- $\{b_\mu(x)\}$ — базис в $\Lambda(x)$, а $\{c_\nu(y)\}$ — базис в $\Lambda(y) \Longrightarrow$ $\{b_\mu(x) c_\nu(y)\}$ — базис в $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$.
- $\Lambda(x, y) \subset \Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ — собственная (почему?) подалгебра формальных степенных рядов ограниченной степени, симметрических по x и y вместе.

Как разложить $s_\lambda(x, y)$ по базису $\{s_\mu(x) s_\nu(y)\}$ в $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$?

- $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ — кольцо формальных степенных рядов ограниченной степени от x и y, симметрических по x и по y по отдельности.
- $\{b_\mu(x)\}$ — базис в $\Lambda(x)$, а $\{c_\nu(y)\}$ — базис в $\Lambda(y) \Longrightarrow$ $\{b_\mu(x)c_\nu(y)\}$ — базис в $\Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$.
- $\Lambda(x, y) \subset \Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$ — собственная (почему?) подалгебра формальных степенных рядов ограниченной степени, симметрических по x и y вместе.

Теорема

$$\boxed{s_\lambda(x, y) = \sum_{\mu \subseteq \lambda} s_\mu(x) s_{\lambda/\mu}(y) = \sum_{\mu,\nu} c^\lambda_{\mu\nu} s_\mu(x) s_\nu(y)}.$$

Доказательство теоремы

- Рассмотрим алфавит $A = \{1 < 2 < \cdots < 1' < 2' < \cdots\}$.
- $T \in \mathrm{SSYT}(\lambda) \rightsquigarrow (xy)^T = x_1^{\#(1)} x_2^{\#(2)} \cdots y_1^{\#(1')} y_2^{\#(2')} \cdots$, где $\#(a)$ — число вхождений a в T.
- По определению $s_\lambda(x, y) = \sum\limits_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)} (xy)^T$.
- Имеем:
  - часть T, занятая $1, 2, \ldots$, есть $SSYT(\mu)$, где $\mu \subseteq \lambda$;
  - часть T, занятая $1', 2', \ldots$, есть $SSYT(\lambda/\mu)$.
- Отсюда $s_\lambda(x, y) = \sum\limits_{\mu \subseteq \lambda} s_\mu(x) s_{\lambda/\mu}(y)$.
- Второе равенство — по определению коэффициентов Литтлвуда–Ричардсона.

Операторы $f^\perp$

Для $f \in \Lambda$ рассмотрим линейные операторы

- $M_f : \Lambda \to \Lambda$: $\boxed{M_f g = fg}$ (мультипликатор).
- $D_f = f^\perp = M_f^* : \Lambda \to \Lambda$: $\boxed{\langle f^\perp u, v\rangle = \langle u, fv\rangle}$.

Замечание. $f \mapsto f^\perp$ — гомоморфизм колец $\Lambda \to \mathrm{End}(\Lambda)$ ($\bigstar$) .

Операторы $f^\perp$

Для $f \in \Lambda$ рассмотрим линейные операторы

- $M_f : \Lambda \to \Lambda$: $\boxed{M_f g = fg}$ (мультипликатор).
- $D_f = f^\perp = M_f^* : \Lambda \to \Lambda$: $\boxed{\langle f^\perp u, v\rangle = \langle u, fv\rangle}$.

Замечание. $f \mapsto f^\perp$ — гомоморфизм колец $\Lambda \to \operatorname{End}(\Lambda)$ (★) .

Теперь немного повычисляем.

- Функции Шура.
  - $\langle s_\nu^\perp s_\lambda, s_\mu\rangle = \langle s_\lambda, s_\nu s_\mu\rangle = \langle s_{\lambda/\nu}, s_\mu\rangle \implies \boxed{s_\nu^\perp s_\lambda = s_{\lambda/\nu}}$;
  - $s_\lambda(x,y) = \sum_\mu s_\mu^\perp s_\lambda(x) s_\mu(y) \implies$ по линейности

$$\boxed{f(x,y) = \sum_\mu (s_\mu^\perp f)(x) s_\mu(y)}$$ для любой $f \in \Lambda$.

Полные однородные симметрические функции

- $\langle h_\lambda^\perp m_\mu, h_\nu\rangle = \langle m_\mu, h_\lambda h_\nu\rangle = \langle m_\mu, h_{\lambda\cup\nu}\rangle = \delta_{\mu,\lambda\cup\nu} \implies$
  $$\boxed{h_\lambda^\perp m_\mu = \begin{cases} m_\nu, & \text{если } \mu = \lambda\cup\nu, \\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}}$$
- В частности, $h_n^\perp m_\mu = \begin{cases} 0, & n \text{ — не часть } \mu, \\ m_{\mu'}, & n \text{ — часть } \mu \ \ (\text{где } \mu' = \mu/\{n\}).\end{cases}$
- Для $f(x_0, x_1, \ldots) \in \Lambda$ имеем $\boxed{(h_n^\perp f)(x_1, x_2, \ldots) = [x_0^n]f}$ $(\star)$.
- **Следствие:** $\boxed{h_m^\perp h_n = h_{n-m}}$.

Симметрические степенные суммы

- $\langle p_n^\perp p_\lambda, p_\mu\rangle = \langle p_\lambda, p_n p_\mu\rangle = \langle p_\lambda, p_{\mu\cup(n)}\rangle = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \mu \cup (n), \\ z_\lambda, & \lambda = \mu \cup (n) \end{cases} \implies$

  $$p_n^\perp p_\lambda = \begin{cases} 0, & n \text{ — не часть } \lambda, \\ \frac{z_\lambda}{z_\mu} p_\mu, & n \text{ — часть } \lambda, \text{ где } \mu = \lambda/\{n\}. \end{cases}$$

- Но $\frac{z_\lambda}{z_\mu} = n m_n(\lambda) \implies \boxed{p_n^\perp = n \frac{\partial}{\partial p_n}}$

  (в частности, $p_n^\perp$ — дифференцирование в Λ).

- $f = \phi(p_1, p_2, \dots) \in \Lambda \implies \boxed{f^\perp = \phi(\frac{\partial}{\partial p_1}, 2\frac{\partial}{\partial p_2}, \dots)}.$

  Пример. $h_2 = \frac{1}{2}(p_2 + p_1^2) \implies h_2^\perp = \frac{1}{2}(2\frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial^2}{\partial p_1^2}).$

Симметрические степенные суммы

- $\langle p_n^\perp p_\lambda, p_\mu\rangle = \langle p_\lambda, p_n p_\mu\rangle = \langle p_\lambda, p_{\mu\cup(n)}\rangle = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \mu\cup(n), \\ z_\lambda, & \lambda = \mu\cup(n) \end{cases} \implies$

  $$p_n^\perp p_\lambda = \begin{cases} 0, & n \text{ — не часть } \lambda, \\ \frac{z_\lambda}{z_\mu} p_\mu, & n \text{ — часть } \lambda, \text{ где } \mu = \lambda/\{n\}. \end{cases}$$

- Но $\frac{z_\lambda}{z_\mu} = n m_n(\lambda) \implies \boxed{p_n^\perp = n\frac{\partial}{\partial p_n}}$

  (в частности, $p_n^\perp$ — дифференцирование в Λ).

- $f = \phi(p_1, p_2, \dots) \in \Lambda \implies \boxed{f^\perp = \phi(\frac{\partial}{\partial p_1}, 2\frac{\partial}{\partial p_2}, \dots)}$.

- $\langle h_n, p_\lambda\rangle = 1$ при $|\lambda| = n$ ($\star$) $\implies$

  $\langle p_n^\perp h_N, p_\lambda\rangle = \langle h_N, p_{\lambda\cup(n)}\rangle = 1 = \langle h_{N-n}, p_\lambda\rangle \implies \boxed{p_n^\perp h_N = h_{N-n}}$

  $$\implies \boxed{p_n^\perp = \sum_{r\geq 0} h_r \frac{\partial}{\partial h_{n+r}} = (-1)^{n-1}\sum_{r\geq 0} e_r \frac{\partial}{\partial e_{n+r}}} \; (\star)\ .$$

Канонические коммутационные соотношения и алгебра Гейзенберга

- При $n \in \mathbb{Z}$ определим $a_n : \Lambda \to \Lambda$:

$$a_n := \begin{cases} M_{p_n} & \text{при } n \geq 1, \\ p_{-n}^{\perp} & \text{при } n \leq -1, \\ 1 & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

Тогда $\boxed{[a_m, a_n] = n\delta_{m+n,0} \cdot 1}$ для любых $m, n \in \mathbb{Z}$ (канонические коммутационные соотношения (CCR)) (★)
$\implies \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ образуют представление алгебры Гейзенберга.

Алгебры Хопфа

- Алгебра Хопфа — (ассоциативная и коассоциативная) биалгебра H (с единицей и коединицей) над полем K вместе с K-линейным отображением $S : H \to H$ (антиподом): коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& H \otimes H \arrow[rr, "S \otimes \mathrm{id}"] & & H \otimes H \arrow[dr, "\nabla"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & K \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
& H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes S"'] & & H \otimes H \arrow[ur, "\nabla"'] &
\end{tikzcd}$$

  - ∇ — умножение,
  - Δ — коумножение ($H \to H \otimes H$),
  - η — единица,
  - ε — коединица,
  - S — антипод.

Примеры алгебр Хопфа

- Групповая алгебра $K[G]$:
  - коумножение $\Delta(g) = g \otimes g$ и продолжить по линейности,
  - коединица $\varepsilon(g) \equiv 1$,
  - антипод $S(g) = g^{-1}$.
- Тензорная алгебра $T(V)$:
  - коумножение $\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v$, $\Delta(1) = 1 \otimes 1$,
  - коединица $\varepsilon(g) \equiv 0$ при $g \neq 1$, $\varepsilon(1) = 1$.
  - антипод $S(v) = -v$ при $v \in T^1(V)$ и продолжить на старшие степени.
- Универсальная обёртывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$:
  - коумножение $\Delta(g) = g \otimes 1 + 1 \otimes g$ при $g \in \mathfrak{g}$ и продолжить,
  - коединица $\varepsilon(g) \equiv 0$ при $g \neq 1$, $\varepsilon(1) = 1$.
  - антипод $S(x) = -x$.

Структура алгебры Хопфа на Λ

- Умножение, единица — обычные.
- Коумножение $\Delta : \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda = \Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$: $\boxed{\Delta f = f(x, y)}$.
- Коединица: $\varepsilon(1) = 1$, $\varepsilon(f) = 0$ при $f \neq 1$.
- Антипод: $S(p_n) = -p_n$, т.е. $S = (-1)^n \omega$ на Λ^n.

Структура алгебры Хопфа на Λ

- Умножение, единица — обычные.
- Коумножение $\Delta : \Lambda \to \Lambda \otimes \Lambda = \Lambda(x) \otimes \Lambda(y)$: $\boxed{\Delta f = f(x, y)}$.
- Коединица: $\varepsilon(1) = 1$, $\varepsilon(f) = 0$ при $f \neq 1$.
- Антипод: $S(p_n) = -p_n$, т.е. $S = (-1)^n \omega$ на Λ^n.

Тогда ($\bigstar$)

- $\Delta h_n = \sum\limits_{p+q=n} h_p \otimes h_q$,
- $\Delta e_n = \sum\limits_{p+q=n} e_p \otimes e_q$,
- $\Delta p_n = p_n \otimes 1 + 1 \otimes p_n$, $n \geq 1$ (примитивные элементы),
- $\Delta s_\lambda = \sum\limits_\mu s_{\lambda/\mu} \otimes s_\mu$ для любой λ
- $\implies \Delta f = \sum\limits_\mu s_\mu^\perp f \otimes s_\mu$ для любой $f \in \Lambda$.

- **Пример.**

$$\Delta\left(p_{\ydiagram{2,2,4}}\right) = p_{\ydiagram{2,2,4}} \otimes 1 + 2p_{\ydiagram{2,4}} \otimes p_{\ydiagram{2}} + p_{\ydiagram{2,2}} \otimes p_{\ydiagram{4}} + 2p_{\ydiagram{2}} \otimes p_{\ydiagram{2,4}} + p_{\ydiagram{4}} \otimes p_{\ydiagram{2,2}} + 1 \otimes p_{\ydiagram{2,2,4}}.$$

- (★) Найти $\Delta H(t)$, $\Delta E(t)$, $\Delta P(t)$.