Теория представлений симметрических групп

Лекция 8. По направлению к правилу Мурнагана–Накаямы

Н. В. Цилевич

22 октября 2021 г.

Правило Мурнагана–Накаямы для цикла

- χ^λ – характер неприводимого представления π_λ.
- $\chi^\lambda(\mu)$ – значение характера π_λ на перестановках типа μ.

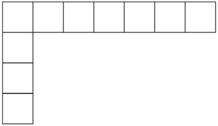
Хотим научиться вычислять $\chi^\lambda(\mu)$.

Правило Мурнагана–Накаямы для цикла

- χ^λ – характер неприводимого представления π_λ.
- $\chi^\lambda(\mu)$ – значение характера π_λ на перестановках типа μ.

Хотим научиться вычислять $\chi^\lambda(\mu)$.

- Крюк – диаграмма Юнга вида $(n-k, 1^k)$ ($\iff$ λ не содержит клетку $(2,2)$; а в терминах содержаний как сформулировать?).

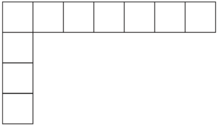


Правило Мурнагана–Накаямы для цикла

- χ^λ – характер неприводимого представления π_λ.
- $\chi^\lambda(\mu)$ – значение характера π_λ на перестановках типа μ.

Хотим научиться вычислять $\chi^\lambda(\mu)$.

- Крюк – диаграмма Юнга вида $(n-k, 1^k)$ ($\iff$ λ не содержит клетку $(2,2)$; а в терминах содержаний как сформулировать?).



Теорема (о значениях неприводимых характеров на одноцикловых перестановках)

При $\lambda \vdash n$ имеем $\chi^\lambda((n)) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если } \lambda = (n-k, 1^k); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

Доказательство теоремы

- Было: $X_2 \dots X_n =$ сумма всех n-циклов в $\mathfrak{S}_n$.
- Если λ – не крюк и $T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$, то $\exists j > 0$: $c_T(j) = 0 \implies X_j w_T = 0 \implies X_2 \dots X_n w_T = 0 \implies \chi^\lambda((n)) = 0$.

Доказательство теоремы

- Было: $X_2 \dots X_n =$ сумма всех n-циклов в $\mathfrak{S}_n$.
- Если λ – не крюк и $T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$, то $\exists j > 0$: $c_T(j) = 0 \implies X_j w_T = 0 \implies X_2 \dots X_n w_T = 0 \implies \chi^\lambda((n)) = 0$.
- Если $\lambda = (n-k, 1^k)$ и $T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$, то $\alpha(T) = (0, a_2, \dots, a_n)$, где $\{a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n-k-1, -1, -2, \dots, -k\} \implies$

$$X_2 \dots X_n w_T = a_2 \dots a_n w_T = (-1)^k k!(n-k-1)! w_T.$$

Доказательство теоремы

- Было: $X_2 \dots X_n =$ сумма всех n-циклов в $\mathfrak{S}_n$.
- Если λ – не крюк и $T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$, то $\exists j > 0$: $c_T(j) = 0 \implies X_j w_T = 0 \implies X_2 \dots X_n w_T = 0 \implies \chi^\lambda((n)) = 0$.
- Если $\lambda = (n-k, 1^k)$ и $T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$, то $\alpha(T) = (0, a_2, \dots, a_n)$, где $\{a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n-k-1, -1, -2, \dots, -k\} \implies$

$$X_2 \dots X_n w_T = a_2 \dots a_n w_T = (-1)^k k!(n-k-1)! w_T.$$

- $\dim \pi_\lambda = \# \mathrm{SYT}(\lambda) = \binom{n-1}{k}$ $(\bigstar)$.
- Число n-циклов в $\mathfrak{S}_n$ равно $(n-1)!$.
- Итого

$$\chi^\lambda((n)) = \frac{\dim \pi_\lambda}{(n-1)!}(-1)^k k!(n-k-1)! = (-1)^k.$$

Теорема (о значениях неприводимых характеров на одноцикловых перестановках)

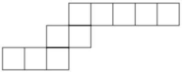
При $\lambda \vdash n$ *имеем* $\chi^\lambda((n)) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если } \lambda = (n-k, 1^k); \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

Итак, мы научились считать характеры для одноцикловых перестановок. А что для неодноцикловых? Сложнее, но тоже можно = (рекурсивное) правило Мурнагана–Накаямы.

Косые диаграммы и косые таблицы

- Пусть $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash k \leqslant n$ и $\mu \subset \lambda$.
  Косая диаграмма λ/μ: из λ убрали клетки, принадлежащие μ.
  Размер $|\lambda/\mu| = n - k$.

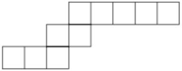
  Пример: $\lambda = (8, 4, 3)$, $\mu = (3, 2)$.



Косые диаграммы и косые таблицы

- Пусть $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash k \leqslant n$ и $\mu \subset \lambda$.
  Косая диаграмма λ/μ: из λ убрали клетки, принадлежащие μ.
  Размер $|\lambda/\mu| = n - k$.

  Пример: $\lambda = (8, 4, 3)$, $\mu = (3, 2)$.

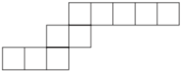


- Строки i и $i + 1$ в λ/μ несвязны $\iff$ несвязны по клеточкам.
- λ/μ связна $\iff$ все пары соседних строк связны.

Косые диаграммы и косые таблицы

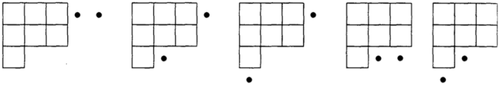
- Пусть $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash k \leqslant n$ и $\mu \subset \lambda$.
  Косая диаграмма λ/μ: из λ убрали клетки, принадлежащие μ.
  Размер $|\lambda/\mu| = n - k$.

  Пример: $\lambda = (8, 4, 3)$, $\mu = (3, 2)$.



- Строки i и $i+1$ в λ/μ несвязны $\iff$ несвязны по клеточкам.
- λ/μ связна $\iff$ все пары соседних строк связны.
- λ/μ – горизонтальная полоса $\iff$ все пары соседних строк несвязны ($\iff$ нет двух клеточек в одном столбце).
- HS(k) – множество горизонтальных полос размера k.

  Пример:



- Стандартная таблица, вектор содержаний, допустимые транспозиции для косого случая – аналогично обычным.

			1	4	5	9	10
		2	3				
6	7	8					

- $\mathrm{SYT}(\lambda/\mu) \leftrightarrow$ пути в графе Юнга $\mathbb{Y}$ от μ до λ.
- Пусть $T_1, T_2 \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$ и $T_2 = gT_1$, где $g \in \mathfrak{S}_{n-k}$. Тогда T_2 получается из T_1 последовательностью $\ell(g)$ допустимых транспозиций.

Косые представления симметрических групп

- Фиксируем $1 \leqslant k \leqslant n-1$ и коммутирующие подгруппы в $\mathfrak{S}_n$:
  - $\mathfrak{S}_{n-k}$ действует на $\{1, \ldots, n-k\}$,
  - $\mathfrak{S}_k$ действует на $\{n-k+1, \ldots, n\}$.
- Пусть $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n-k$ (таким образом, $|\lambda/\mu| = k$), причём $\mu \subset \lambda$ $\rightsquigarrow$ косое представление $\pi_{\lambda/\mu}$ группы $\mathfrak{S}_k$:
  - $V^{\lambda/\mu} := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_{n-k}}(\pi_\mu, \pi_\lambda)$,
  - элемент $g \in \mathfrak{S}_k$ действует по формуле $V \ni \Phi \mapsto g\Phi$.

  Корректность – в силу коммутирования (★) .
- Очевидно: $\dim \pi_{\lambda/\mu} = \#\,\mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$.

- Удобно считать, что таблицы из $\mathsf{SYT}(\lambda/\mu)$ заполнены числами $n-k+1,\ldots,n$.
- $R \in \mathsf{SYT}(\mu)$, $T \in \mathsf{SYT}(\lambda/\mu) \rightsquigarrow R \sqcup T \in \mathsf{SYT}(\lambda)$: заполняем $1,\ldots,n-k$ по R, а $n-k+1,\ldots,n$ по T.

Пример:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \cline{1-2}\end{array}$$

R

$$\begin{array}{cccccccc} & & & \multicolumn{1}{|c|}{7} & \multicolumn{1}{c|}{9} & \multicolumn{1}{c|}{11} & \multicolumn{1}{c|}{13} \\ \cline{3-7} & & \multicolumn{1}{|c|}{6} & \multicolumn{1}{c|}{8} & & & \\ \cline{1-4} \multicolumn{1}{|c|}{10} & \multicolumn{1}{c|}{12} & \multicolumn{1}{c|}{14} & & & & \\ \cline{1-3}\end{array}$$

T

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 8 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-4} 10 & 12 & 14 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-3}\end{array}$$

$R \sqcup T$

- Удобно считать, что таблицы из $\mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$ заполнены числами $n-k+1,\ldots,n$.
- $R \in \mathrm{SYT}(\mu)$, $T \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu) \rightsquigarrow R \sqcup T \in \mathrm{SYT}(\lambda)$: заполняем $1,\ldots,n-k$ по R, а $n-k+1,\ldots,n$ по T.

Пример:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad \begin{array}{cccccccc} & & & \multicolumn{1}{|c|}{7} & \multicolumn{1}{c|}{9} & \multicolumn{1}{c|}{11} & \multicolumn{1}{c|}{13} \\ \cline{3-7} & & \multicolumn{1}{|c|}{6} & \multicolumn{1}{c|}{8} & & & \\ \cline{1-4} \multicolumn{1}{|c|}{10} & \multicolumn{1}{c|}{12} & \multicolumn{1}{c|}{14} & & & & \\ \cline{1-3}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 7 & 9 & 11 & 13 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 8 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-4} 10 & 12 & 14 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-3}\end{array}$$

R $\qquad$ T $\qquad$ $R \sqcup T$

- $T \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu) \rightsquigarrow$ линейный оператор $\Phi_T \colon V^\mu \to V^\lambda$:

$$\Phi_T w_R := w_{R \sqcup T}.$$

Теорема

(1) $\{\Phi_T\}_{T \in \mathsf{SYT}(\lambda/\mu)}$ – *базис в* $\pi_{\lambda/\mu}$.

(2) *При* $j = n-k+1, \ldots, n-1$ *имеем* $s_j \Phi_T = \frac{1}{r}\Phi_T + \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}\Phi_{s_j T}$, *где* r – *осевое расстояние от* $j+1$ *до* j *в* T.

Теорема

(1) $\{\Phi_T\}_{T \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu)}$ – *базис в* $\pi_{\lambda/\mu}$.

(2) *При* $j = n-k+1, \ldots, n-1$ *имеем* $s_j\Phi_T = \frac{1}{r}\Phi_T + \sqrt{1-\frac{1}{r^2}}\Phi_{s_jT}$, *где* r *– осевое расстояние от* $j+1$ *до* j *в* T.

Доказательство. Докажем сначала, что $\Phi_T \in V^{\lambda/\mu}$.

- Очевидно: $s_j(R \sqcup T) = \begin{cases} (s_jR) \sqcup T, & j \leqslant n-k-1, \\ R \sqcup (s_jT), & j \geqslant n-k+1. \end{cases}$
- При $j \leqslant n-k-1$ осевое расстояние в R и $R \sqcup T$ совпадает $\implies s_j\Phi_T w_R = s_j w_{R\sqcup T} = \frac{1}{r}w_{R\sqcup T} + \sqrt{1-\frac{1}{r^2}}w_{(s_jR)\sqcup T} = \Phi_T s_j w_R$ для любого $j \leqslant n-k-1 \implies \Phi_T$ коммутирует с $\mathfrak{S}_{n-k}$ $\implies \Phi_T \in V^{\lambda/\mu}$.

Продолжение доказательства

- $\Phi_{T_1} V^\mu \perp \Phi_{T_2} V^\mu$ при $T_1 \neq T_2 \implies \{\Phi_T\}$ линейно независимы (почему?).
- $\dim \pi_{\lambda/\mu} = \#\,\mathrm{SYT}(\lambda/\mu) \implies \{\Phi_T\}_{T \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu)}$ – базис в $\pi_{\lambda/\mu}$.
- При $j \geqslant n-k+1$ осевое расстояние в T и $R \sqcup T$ совпадает
$$\implies s_j \Phi_T w_R = s_j w_{R \sqcup T} = \frac{1}{r} w_{R \sqcup T} + \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}\, w_{R \sqcup (s_j T)} =$$
$$= \left(\frac{1}{r}\Phi_T + \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}\, \Phi_{s_j T}\right) w_R \implies \text{QED}.$$

Замечания.

1. При $T \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$ обозначаем $w_T := \Phi_T$ (базис Юнга в $\pi_{\lambda/\mu}$).
2. $\pi_{\lambda/\mu}$ зависит только от формы λ/μ.
3. Поэтому можно рассматривать её минимальную реализацию, т.е. считать, что $\lambda_1 > \mu_1$, $\ell(\lambda) > \ell(\mu)$.
4. $\pi_{\lambda/\mu}$, вообще говоря, не неприводимо.

Замечания.

1. При $T \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$ обозначаем $w_T := \Phi_T$ (базис Юнга в $\pi_{\lambda/\mu}$).
2. $\pi_{\lambda/\mu}$ зависит только от формы λ/μ.
3. Поэтому можно рассматривать её минимальную реализацию, т.е. считать, что $\lambda_1 > \mu_1$, $\ell(\lambda) > \ell(\mu)$.
4. $\pi_{\lambda/\mu}$, вообще говоря, не неприводимо.

Следствие (доказательства)

$$\boxed{\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-k}\times\mathfrak{S}_k}\,\pi_\lambda = \sum_{\mu\vdash n-k,\,\mu\subset\lambda} \pi_\mu \otimes \pi_{\lambda/\mu}}.$$

Слушатели курса по теории симметрических функций, вам эта формула ничего не напоминает?

- Разложение $\beta = (b_1, \ldots, b_\ell)$ числа k:
  $k = b_1 + \ldots + b_\ell$, $b_i \in \mathbb{N}$.
- $\mathrm{Comp}(k)$ = множество разложений k.
- Разложение $\beta \in \mathrm{Comp}(k) \rightsquigarrow$ подгруппа Юнга
  $\mathfrak{S}_\beta := \mathfrak{S}_{b_1} \times \mathfrak{S}_{b_2} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{b_\ell} \subset \mathfrak{S}_k$.

- Разложение $\beta = (b_1, \ldots, b_\ell)$ числа k:
  $k = b_1 + \ldots + b_\ell$, $b_i \in \mathbb{N}$.
- $\mathrm{Comp}(k)$ = множество разложений k.
- Разложение $\beta \in \mathrm{Comp}(k) \rightsquigarrow$ подгруппа Юнга
  $\mathfrak{S}_\beta := \mathfrak{S}_{b_1} \times \mathfrak{S}_{b_2} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{b_\ell} \subset \mathfrak{S}_k$.

Лемма

Пусть $\beta = (b_1, \ldots, b_\ell) \in \mathrm{Comp}(k)$. *Тогда*

$$\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_\beta} \pi_{\lambda/\mu} = \sum \pi_{\lambda^{(1)}/\mu} \otimes \pi_{\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}} \otimes \ldots \otimes \pi_{\lambda/\lambda^{(\ell-1)}},$$

сумма – по всем последовательностям

$$\mu = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \ldots \subset \lambda^{(\ell-1)} \subset \lambda^{(\ell)} = \lambda,$$

где $|\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}| = b_i$, $i = 1, \ldots, \ell - 1$.

Доказательство: прямое обобщение следствия.

Лемма (о цикличности векторов Юнга)

Для любой $T \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$ *вектор* w_T *– циклический в* $\pi_{\lambda/\mu}$.

Доказательство.

- Пусть $W := \langle g w_T : g \in \mathfrak{S}_k \rangle$ и $R \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$. Надо: $w_R \in W$.
- Возьмём $\sigma_R \in \mathfrak{S}_k$: $\sigma_R T = R$. Далее – индукция по $\ell(\sigma_R)$.
- <u>База</u> $\ell(\sigma_R) = 1 \implies \sigma_R = s_j$.
  Имеем $s_j w_T = \frac{1}{r} w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} w_R \implies$ QED.
- <u>Переход</u>. Возьмём $R_1 \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$, такую, что $\ell(\sigma_{R_1}) = \ell(\sigma_R) - 1$ и $\sigma_R = s_j \sigma_{R_1}$.
  Тогда $R = s_j R_1$, причём $w_{R_1} \in W$ по предположению индукции.
  Имеем $s_j w_{R_1} = \frac{1}{r} w_{R_1} + \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} w_R \implies$ QED.

Напоминание: индуцированные представления

G – конечная группа, $K \subset G$ – подгруппа, ρ – представление K в пространстве V. Индуцированное представление $\sigma = \operatorname{Ind}_K^G \rho$:

- $W = \sum\limits_{s \in \mathcal{S}} sV$, где $\mathcal{S}$ – система представителей G/K,
- действие: $\sigma(g)(sv) = s'\rho(h)v$, где $gs = s'h$, $h \in K$, $s' \in \mathcal{S}$.

Напоминание: индуцированные представления

G – конечная группа, $K \subset G$ – подгруппа, ρ – представление K в пространстве V. Индуцированное представление $\sigma = \operatorname{Ind}_K^G \rho$:

- $W = \sum\limits_{s \in \mathcal{S}} sV$, где $\mathcal{S}$ – система представителей G/K,
- действие: $\sigma(g)(sv) = s'\rho(h)v$, где $gs = s'h$, $h \in K$, $s' \in \mathcal{S}$.

Лемма

(τ, W) – представление G, $K \subset G$, V – K-инвариантное подпр-во, $W = \bigoplus\limits_{s \in \mathcal{S}} \tau(s)V \implies W \simeq \operatorname{Ind}_K^G \rho$, где ρ – представление K в V.

Доказательство: (★) .

Базовые свойства индуцированных представлений

- Формула Фробениуса для характера индуцированного представления:

$$\chi^{\sigma}(g) = \sum_{s \in \mathcal{S}\colon s^{-1} g s \in K} \chi^{\rho}(s^{-1} g s).$$

- Взаимность Фробениуса:

$$\langle \operatorname{Ind}_K^G \phi, \psi \rangle = \langle \phi, \operatorname{Res}_K^G \psi \rangle.$$

Отступление: перестановочные представления

- Пусть группа G действует на конечном множестве X (т.е. имеется гомоморфизм $G \to \mathfrak{S}_X$).
- $L(X) = \{\sum c_i x_i\}$ – линейное пространство, натянутое на X.
- Перестановочное представление G на $L(X)$: $\rho(g)(\sum c_i x_i) = \sum c_i g x_i$.

Отступление: перестановочные представления

- Пусть группа G действует на конечном множестве X (т.е. имеется гомоморфизм $G \to \mathfrak{S}_X$).
- $L(X) = \{\sum c_i x_i\}$ – линейное пространство, натянутое на X.
- Перестановочное представление G на $L(X)$: $\rho(g)(\sum c_i x_i) = \sum c_i g x_i$.
- $\chi^\rho(g) = \#\operatorname{Fix}(g)$ – число неподвижных элементов для g.
- K – подгруппа G и $X := G/K \implies \operatorname{Ind}_K^G \operatorname{id}_K$ – перестановочное представление G на $L(X)$.
- Любое транзитивное действие эквивалентно такому ($X = G/\operatorname{Stab}(x)$).
- (★) Если действие транзитивно, то кратность тривиального представления в соответствующем перестановочном равна 1.

Лемма (о несвязных строках)

Пусть $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n-k$, $\mu \subset \lambda$, *и строки* j *и* $j+1$ *несвязны в* λ/μ. *Пусть*

- θ/ν *– часть* λ/μ, *состоящая из строк* $1, \ldots, j$,
- η/τ *– часть* λ/μ, *состоящая из строк* $j+1, \ldots, r$.

Пусть $|\theta/\nu| = m$ *(и, следовательно,* $|\eta/\tau| = k-m$*). Тогда*

$$\pi_{\lambda/\mu} \simeq \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{k-m}}^{\mathfrak{S}_k}(\pi_{\theta/\nu} \otimes \pi_{\eta/\tau}).$$

Доказательство

- $W :=$ подпространство в $V^{\lambda/\mu}$, натянутое на w_T, где у T элементы $1, \ldots, m$ стоят в θ/ν, а $m+1, \ldots, k$ – в η/τ.
- Ясно: $W \simeq \pi_{\theta/\nu} \otimes \pi_{\eta/\tau}$ как представление $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{k-m}$.

Доказательство

- $W :=$ подпространство в $V^{\lambda/\mu}$, натянутое на w_T, где у T элементы $1, \ldots, m$ стоят в θ/ν, а $m+1, \ldots, k$ – в η/τ.
- Ясно: $W \simeq \pi_{\theta/\nu} \otimes \pi_{\eta/\tau}$ как представление $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{k-m}$.
- Пусть $\mathcal{S}$ – система представителей классов смежности $\mathfrak{S}_k/(\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{k-m})$. Надо: $V^{\lambda/\mu} = \bigoplus\limits_{s \in \mathcal{S}} sW$. Тогда по лемме OK.
- $\{sW\}_{s \in \mathcal{S}}$ порождают $V^{\lambda/\mu}$, так как векторы Юнга – циклические.
- $\dim \pi_{\lambda/\mu} = \#\,\mathrm{SYT}(\lambda/\mu) = \binom{k}{m} \dim \pi_{\theta/\nu} \dim \pi_{\eta/\tau} = |\mathcal{S}| \dim \mathcal{W}$ $\implies$ сумма прямая.

Лемма (о несвязных строках)

Пусть $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n-k$, $\mu \subset \lambda$, *и строки* j *и* $j+1$ *несвязны в* λ/μ. *Пусть*

- θ/ν *– часть* λ/μ, *состоящая из строк* $1, \ldots, j$,
- η/τ *– часть* λ/μ, *состоящая из строк* $j+1, \ldots, r$.

Пусть $|\theta/\nu| = m$ *(и, следовательно,* $|\eta/\tau| = k-m$*). Тогда*

$$\pi_{\lambda/\mu} \simeq \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{k-m}}^{\mathfrak{S}_k} (\pi_{\theta/\nu} \otimes \pi_{\eta/\tau}).$$

Следствие (о горизонтальной полосе)

Если λ/μ *– горизонтальная полоса с длинами строк* $b_1, \ldots, b_t$, *то*

$$\pi_{\lambda/\mu} \simeq \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\beta}^{\mathfrak{S}_k} (\pi_{(b_1)} \otimes \ldots \otimes \pi_{(b_t)}),$$

т.е. $\pi_{\lambda/\mu}$ *изоморфно перестановочному представлению* $\mathfrak{S}_k$ *на* $\mathfrak{S}_k/\mathfrak{S}_\beta$.