Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 8. Применения структуры алгебры Хопфа. Специализации

Н. В. Цилевич

27 октября 2021 г.

- Скалярное произведение в $\Lambda \otimes \Lambda$: $\boxed{\langle f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2 \rangle := \langle f_1, f_2 \rangle \langle g_1, g_2 \rangle}$.

Предложение

$\boxed{\langle \Delta f, g \otimes h \rangle = \langle f, gh \rangle}$ *(коумножение сопряжено умножению).*

- Скалярное произведение в $\Lambda \otimes \Lambda$:
$\boxed{\langle f_1 \otimes g_1, f_2 \otimes g_2 \rangle := \langle f_1, f_2 \rangle \langle g_1, g_2 \rangle}$.

Предложение

$\boxed{\langle \Delta f, g \otimes h \rangle = \langle f, gh \rangle}$ *(коумножение сопряжено умножению).*

Доказательство. Достаточно проверить для функций Шура:

$$\langle \Delta s_\lambda, s_\mu \otimes s_\nu \rangle = \langle \sum_\rho s_{\lambda/\rho} \otimes s_\rho, s_\mu \otimes s_\nu \rangle = \sum_\rho \langle s_{\lambda/\rho}, s_\mu \rangle \langle s_\rho, s_\nu \rangle =$$

$$= \langle s_{\lambda/\nu}, s_\mu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle \implies \text{QED}.$$

Предложение

Если $\Delta f = \sum_i a_i \otimes b_i$*, то* $f^{\perp}(gh) = \sum_i a_i^{\perp}(g) b_i^{\perp}(h)$ *для любых* $f, g \in \Lambda$*.*

В частности, $\boxed{s_\lambda^{\perp}(gh) = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}^{\lambda} s_\mu^{\perp}(g) s_\nu^{\perp}(h)}$*, а также*

$\boxed{p_n^{\perp}(gh) = p_n^{\perp} g \cdot h + g \cdot p_n^{\perp} h}$ *(т.е.* $p_n^{\perp}$ *— дифференцирование).*

Предложение

Если $\Delta f = \sum_i a_i \otimes b_i$, *то* $f^\perp(gh) = \sum_i a_i^\perp(g) b_i^\perp(h)$ *для любых* $f, g \in \Lambda$.

В частности, $\boxed{s_\lambda^\perp(gh) = \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu}^\lambda s_\mu^\perp(g) s_\nu^\perp(h)}$, *а также*

$\boxed{p_n^\perp(gh) = p_n^\perp g \cdot h + g \cdot p_n^\perp h}$ *(т.е.* $p_n^\perp$ *— дифференцирование).*

Доказательство.

$$\langle f^\perp(gh), s_\lambda\rangle = \langle gh, fs_\lambda\rangle = \langle \Delta(fs_\lambda), g \otimes h\rangle = \langle \Delta f \Delta s_\lambda, g \otimes h\rangle =$$
$$= \langle \sum_i a_i \otimes b_i \cdot \sum_\mu s_{\lambda/\mu} \otimes s_\mu, g \otimes h\rangle = \sum_{i,\mu} \langle a_i s_{\lambda/\mu} \otimes b_i s_\mu, g \otimes h\rangle =$$
$$= \sum_{i,\mu} \langle a_i s_{\lambda/\mu}, g\rangle \langle b_i s_\mu, h\rangle = \sum_{i,\mu} \langle s_{\lambda/\mu}, a_i^\perp g\rangle \langle s_\mu, b_i^\perp h\rangle =$$
$$= \sum_{i,\mu} \langle s_{\lambda/\mu} \otimes s_\mu, a_i^\perp g \otimes b_i^\perp h\rangle = \sum_i \langle \Delta s_\lambda, a_i^\perp g \otimes b_i^\perp h\rangle =$$
$$= \langle s_\lambda, \sum_i a_i^\perp(g) b_i^\perp(h)\rangle \implies \text{QED}.$$

Операторы $E^{\perp}(t)$ и $H^{\perp}(t)$

- $\boxed{E^{\perp}(t) := \sum_{n\geq 0} e_n^{\perp} t^n}$, $\boxed{H^{\perp}(t) := \sum_{n\geq 0} h_n^{\perp} t^n}$.

Операторы $E^{\perp}(t)$ и $H^{\perp}(t)$

- $\boxed{E^{\perp}(t) := \sum_{n\geq 0} e_n^{\perp} t^n}$, $\boxed{H^{\perp}(t) := \sum_{n\geq 0} h_n^{\perp} t^n}$.
- Это отображения $\Lambda \to \Lambda[[t]]$.
- $H^{\perp}(t)\omega = \omega E^{\perp}(t)$ $(\star)$.

Операторы $E^{\perp}(t)$ и $H^{\perp}(t)$

- $\boxed{E^{\perp}(t) := \sum_{n\geq 0} e_n^{\perp} t^n}$, $\boxed{H^{\perp}(t) := \sum_{n\geq 0} h_n^{\perp} t^n}$.
- Это отображения $\Lambda \to \Lambda[[t]]$.
- $H^{\perp}(t)\omega = \omega E^{\perp}(t)$ ($\bigstar$) .

Предложение

$E^{\perp}(t)$, $H^{\perp}(t)$ — гомоморфизмы колец.

Доказательство.

- $\Delta e_n = \sum_{p+q=n} e_p \otimes e_q \implies e_n^{\perp}(gh) = \sum_{p+q=n} e_p^{\perp}(g) e_q^{\perp}(h)$.
- $$E^{\perp}(t)(gh) = \sum_{n\geq 0} t^n \sum_{p+q=n} e_p^{\perp}(g) e_q^{\perp}(h) =$$
  $$= \sum_{n\geq 0} \sum_{p+q=n} t^p e_p^{\perp}(g) \cdot t^q e_q^{\perp}(h) = E^{\perp}(t)(g) \cdot E^{\perp}(t)(h).$$
- Для $H^{\perp}(t)$ аналогично.

Предложение

$$\boxed{H^{\perp}(t)H(u) = \frac{1}{1-tu}H(u)H^{\perp}(t)}.$$

Предложение

$$\boxed{H^{\perp}(t)H(u) = \frac{1}{1-tu}H(u)H^{\perp}(t)}.$$

Доказательство.

- Будем считать, что $h_r = 0$ при $r < 0$.
- $h_m^{\perp}(h_n) = h_{n-m} \implies H^{\perp}(t)(H(u)) = \left(\sum_{m\geq 0} h_m^{\perp} t^m\right)\left(\sum_{n\geq 0} h_n u^n\right) =$
  $= \sum_{m,n\geq 0} h_{n-m} t^m u^n = \sum_{k,m\geq 0} h_k u^k \cdot u^m t^m = \frac{1}{1-tu} H(u)$.
- $H^{\perp}(t)(H(u)f) = H^{\perp}(t)(H(u)) \cdot H^{\perp}(t)(f) = \frac{1}{1-tu} H(u)H^{\perp}(t)(f)$
  $\implies$ QED.

Предложение

$$\boxed{H^{\perp}(t)H(u) = \frac{1}{1-tu}H(u)H^{\perp}(t)}.$$

Доказательство.

- Будем считать, что $h_r = 0$ при $r < 0$.
- $h_m^{\perp}(h_n) = h_{n-m} \implies H^{\perp}(t)(H(u)) = \left(\sum_{m\geq 0} h_m^{\perp} t^m\right)\left(\sum_{n\geq 0} h_n u^n\right) =$ $= \sum_{m,n\geq 0} h_{n-m} t^m u^n = \sum_{k,m\geq 0} h_k u^k \cdot u^m t^m = \frac{1}{1-tu}H(u)$.
- $H^{\perp}(t)(H(u)f) = H^{\perp}(t)(H(u)) \cdot H^{\perp}(t)(f) = \frac{1}{1-tu}H(u)H^{\perp}(t)(f)$ $\implies$ QED.

(★) Вывести аналогичные формулы для $H^{\perp}(t)E(u)$, $E^{\perp}(t)E(u)$, $E^{\perp}(t)H(u)$.

Специализации

- Специализация Λ — (унитальный) гомоморфизм $\phi : \Lambda \to R$, где R — коммутативная $\mathbb{Q}$-алгебра с единицей.

Специализации

- Специализация Λ — (унитальный) гомоморфизм $\phi : \Lambda \to R$, где R — коммутативная $\mathbb{Q}$-алгебра с единицей.

Простейший пример — подстановка $\phi(f) = f(a_1, a_2, \ldots)$, $a_i \in R$ (если она формально корректно определена). Но есть и другие.

- Уменьшение числа переменных: $\Lambda_n := \mathbb{Q}^{\mathfrak{S}_n}[x_1, \ldots, x_n]$ и $r_n(f) = f(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) =: f(x_1, \ldots, x_n)$.

Положим $\Pi^{\leq n} := \{\lambda \in \Pi \colon \ell(\lambda) \leq n\}$.

Предложение

- $\{r_n(m_\lambda) : \lambda \in \Pi^{\leq n}\}$, $\{r_n(e_\lambda) : \lambda' \in \Pi^{\leq n}\}$, $\{r_n(h_\lambda) : \lambda' \in \Pi^{\leq n}\}$, $\{r_n(p_\lambda) : \lambda' \in \Pi^{\leq n}\}$, $\{r_n(s_\lambda) : \lambda \in \Pi^{\leq n}\}$ — *$\mathbb{Q}$-базисы в Λ_n.* *Если $\lambda \notin \Pi^{\leq n}$, то $r_n(m_\lambda) = r_n(e_{\lambda'}) = 0$.*
- *Зададим $\omega_n \colon \Lambda_n \to \Lambda_n$ формулой $\omega_n(e_\lambda) = h_\lambda$ при $\lambda' \in \Pi^{\leq n}$.* *Тогда ω_n — инволютивный автоморфизм Λ_n и $\omega_n(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda p_\lambda$ при $\lambda' \in \Pi^{\leq n}$.*

Доказательство: (★) .

Следствие

$\boxed{\dim \Lambda_n = \#\{\lambda \in \Pi \colon \ell(\lambda) \leq n\}}$.

Рекуррентные соотношения для e_k и h_k

Лемма

$$\boxed{e_k(x_1, \ldots, x_n) = e_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) + x_n e_{k-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})},$$

$$\boxed{h_k(x_1, \ldots, x_n) = h_k(x_1, \ldots, x_{n-1}) + x_n h_{k-1}(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Доказательство: очевидно (почему?).

И снова о числах Стирлинга

Вспомним:

- Числа Стирлинга 1 рода: $(-1)^{n-k}s(n,k) =$ число перестановок из $\mathfrak{S}_n$ с ровно k циклами.
- Числа Стирлинга 2 рода: $S(n,k) =$ число разбиений множества $[n]$ на ровно k частей.

И снова о числах Стирлинга

Вспомним:

- Числа Стирлинга 1 рода: $(-1)^{n-k}s(n,k) =$ число перестановок из $\mathfrak{S}_n$ с ровно k циклами.
- Числа Стирлинга 2 рода: $S(n,k) =$ число разбиений множества $[n]$ на ровно k частей.

Лемма

- $|s(n,k)| = |s(n-1,k-1)| + (n-1)|s(n-1,k)|$,
- $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$.

Доказательство: очевидно (почему?).

Предложение

(1) $s(n,k) = e_{n-k}(-1,-2,\ldots,-(n-1))$,

(2) $S(n,k) = h_{n-k}(1,\ldots,k)$.

Предложение

(1) $s(n,k) = e_{n-k}(-1,-2,\ldots,-(n-1))$,

(2) $S(n,k) = h_{n-k}(1,\ldots,k)$.

Доказательство:

(1) Доказано. Можно передоказать аналогично второму (★) .

(2) Индукция по $n+k$.

- <u>База</u> $n=k=0 \implies S(0,0)=1=h_0(\emptyset)$;
  $n=1 \implies S(1,0)=0=h_1(\emptyset)$, $S(1,1)=1=h_1(1)$.
- <u>Переход:</u> $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k) =$
  $= h_{n-k}(1,\ldots,k-1) + kh_{n-k-1}(1,\ldots,k-1) = h_{n-k}(1,\ldots,k)$.

Предложение

(1) $s(n,k) = e_{n-k}(-1,-2,\ldots,-(n-1))$,

(2) $S(n,k) = h_{n-k}(1,\ldots,k)$.

Следствие

Для любых $m, n \geq 1$

$$\sum_{j=0}^{m} s(n+1, n+1-j) S(n+m-j, n) = 0.$$

Предложение

(1) $s(n,k) = e_{n-k}(-1,-2,\ldots,-(n-1))$,

(2) $S(n,k) = h_{n-k}(1,\ldots,k)$.

Следствие

Для любых $m, n \geq 1$

$$\sum_{j=0}^{m} s(n+1, n+1-j) S(n+m-j, n) = 0.$$

- ($\bigstar$) Найти производящую функцию $\sum_{n=k}^{\infty} S(n,k) x^{n-k}$.

Рассмотрим ещё несколько специализаций, используемых в перечислительных задачах.

- Главная специализация (порядка n) $\mathrm{ps}_n \colon \Lambda \to \mathbb{Q}[q]$,
  $\boxed{\mathrm{ps}_n(f) = f(1, q, q^2, \ldots, q^{n-1})}$.
  - **Пример:** $\mathrm{ps}_n(p_\lambda) = \prod\limits_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{n\lambda_i}}{1-q^{\lambda_i}}$ $(\bigstar)$.

Рассмотрим ещё несколько специализаций, используемых в перечислительных задачах.

- Главная специализация (порядка n) $\mathrm{ps}_n\colon \Lambda \to \mathbb{Q}[q]$,
  $\boxed{\mathrm{ps}_n(f) = f(1, q, q^2, \ldots, q^{n-1})}$.
  - **Пример:** $\mathrm{ps}_n(p_\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{n\lambda_i}}{1-q^{\lambda_i}}$ $(\bigstar)$.
- Стабильная главная специализация $\mathrm{ps}\colon \Lambda \to \mathbb{Q}[[q]]$,
  $\boxed{\mathrm{ps}(f) = f(1, q, q^2, \ldots)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{ps}_n(f)$.
  Сходимость в $\mathbb{Q}[[q]]$: $\lim F_i = F$, где $F(q) = \sum_{n\geq 0} a_n q^n \iff$
  $\forall n \geq 0\ \exists N$: $[q^n]F_i(q) = a_n$ при $i \geq N$.
  - **Пример:** $\mathrm{ps}(p_\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1}{1-q^{\lambda_i}}$ $(\bigstar)$.

Рассмотрим ещё несколько специализаций, используемых в перечислительных задачах.

- Главная специализация (порядка n) $\mathrm{ps}_n \colon \Lambda \to \mathbb{Q}[q]$, $\boxed{\mathrm{ps}_n(f) = f(1, q, q^2, \ldots, q^{n-1})}$.
  - **Пример:** $\mathrm{ps}_n(p_\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1-q^{n\lambda_i}}{1-q^{\lambda_i}}$ $(\bigstar)$.
- Стабильная главная специализация $\mathrm{ps} \colon \Lambda \to \mathbb{Q}[[q]]$, $\boxed{\mathrm{ps}(f) = f(1, q, q^2, \ldots)} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{ps}_n(f)$.
  - **Пример:** $\mathrm{ps}(p_\lambda) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1}{1-q^{\lambda_i}}$ $(\bigstar)$.
- Специализация $\mathrm{ps}_n^1 : \Lambda \to \mathbb{Q}$ — подстановка $q = 1$ в ps_n: $\mathrm{ps}_n^1(f) = f(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}) =: f(1^n)$.
  - **Пример:** $\mathrm{ps}_1(p_\lambda) = n^{\ell(\lambda)}$ $(\bigstar)$.

Экспоненциальная специализация

Но есть и специализации, не сводящиеся к подстановке!

- Экспоненциальная специализация $\mathrm{ex}\colon \Lambda \to \mathbb{Q}[u]$: $\boxed{\mathrm{ex}(p_n) = u\delta_{1n}}$.
- Таким образом, $\mathrm{ex}(P(t)) = u$, $\mathrm{ex}(H(t)) = \mathrm{ex}(E(t)) = e^{ut}$.

Экспоненциальная специализация

Но есть и специализации, не сводящиеся к подстановке!

- Экспоненциальная специализация $\mathrm{ex}\colon \Lambda \to \mathbb{Q}[u]$: $\boxed{\mathrm{ex}(p_n) = u\delta_{1n}}$.
- Таким образом, $\mathrm{ex}(P(t)) = u$, $\mathrm{ex}(H(t)) = \mathrm{ex}(E(t)) = e^{ut}$.

Предложение

$\mathrm{ex}(f) = \sum_{n\geq 0} [x_1 x_2 \cdots x_n] f \cdot \frac{u^n}{n!}$.

Доказательство: достаточно проверить для p_λ $(\star)$.

Следствие

- $\mathrm{ex}(m_\lambda) = \begin{cases} \frac{u^n}{n!}, & \lambda = (1^n), \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$
- $\mathrm{ex}(p_\lambda) = \begin{cases} u^n, & \lambda = (1^n), \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$
- $\mathrm{ex}(h_\lambda) = \mathrm{ex}(e_\lambda) = \frac{u^{|\lambda|}}{\lambda_1!\lambda_2!\dots}$;
- $\mathrm{ex}(s_\lambda) = \dim\lambda \cdot \frac{u^{|\lambda|}}{|\lambda|!}$.

Доказательство:

- Первые три пункта — (★) .
- $s_\lambda = \sum_\mu K_{\lambda\mu} m_\mu \implies \mathrm{ex}(s_\lambda) = K_{\lambda,(1^{|\lambda|})} \frac{u^{|\lambda|}}{|\lambda|!} = \dim\lambda \cdot \frac{u^{|\lambda|}}{|\lambda|!}$.

И ещё одна специализация

- Специализация $\mathrm{ex}_1 : \Lambda \to \mathbb{Q}$: $\boxed{\mathrm{ex}_1(f) = \mathrm{ex}(f)|_{u=1}}$.
- Таким образом, $\mathrm{ex}_1(P(t)) = 1$, $\mathrm{ex}_1(H(t)) = \mathrm{ex}_1(E(t)) = e^t$.

И ещё одна специализация

- Специализация $\mathrm{ex}_1 : \Lambda \to \mathbb{Q}$: $\boxed{\mathrm{ex}_1(f) = \mathrm{ex}(f)|_{u=1}}$.
- Таким образом, $\mathrm{ex}_1(P(t)) = 1$, $\mathrm{ex}_1(H(t)) = \mathrm{ex}_1(E(t)) = e^t$.
- Напоминание: положим $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$ и устремим $n \to \infty \implies E(t) = H(t) = e^t$.
  Следовательно, «$\mathrm{ex}_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{ps}_n^1$».

И ещё одна специализация

- Специализация $\mathrm{ex}_1 \colon \Lambda \to \mathbb{Q}$: $\boxed{\mathrm{ex}_1(f) = \mathrm{ex}(f)|_{u=1}}$.
- Таким образом, $\mathrm{ex}_1(P(t)) = 1$, $\mathrm{ex}_1(H(t)) = \mathrm{ex}_1(E(t)) = e^t$.
- <u>Напоминание</u>: положим $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$ и устремим $n \to \infty \implies E(t) = H(t) = e^t$.
  Следовательно, «$\mathrm{ex}_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{ps}_n^1$».
- $(\star)$ $\mathrm{ex}_1(s_{\lambda/\mu}) = \frac{\dim(\lambda/\mu)}{N!}$, где $N = |\lambda/\mu|$.