Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 9. Тождество Якоби–Труди. Правило Мурнагана–Накаямы

Н. В. Цилевич

29 октября 2021 г.

Пример

$$F(x) := \prod_i (1 - x_i)^{-1} \cdot \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x) \implies \boxed{\operatorname{ex} F(x) = e^{u + \frac{u^2}{2}}}.$$

Пример

$$F(x) := \prod_i (1 - x_i)^{-1} \cdot \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x) \implies \boxed{\operatorname{ex} F(x) = e^{u + \frac{u^2}{2}}}.$$

Доказательство.

- $\operatorname{ex} \prod_i (1 - x_i)^{-1} = \operatorname{ex} \sum_{n \geq 0} h_n = \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!} = e^u.$
- $\prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1} = \exp \sum_{i<j} \ln(1 - x_i x_j)^{-1} = \exp \sum_{i<j} \sum_{n \geq 1} \frac{(x_i x_j)^n}{n} =$
  $= \exp \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} (p_n^2 - p_{2n}) \implies$
  $\operatorname{ex} \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1} = \exp \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n} \operatorname{ex}(p_n^2 - p_{2n}) = e^{u^2/2}.$
- $\operatorname{ex} F(x) = \operatorname{ex} \prod_i (1 - x_i)^{-1} \cdot \operatorname{ex} \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)^{-1} =$ QED.

Пример

$$F(x) := \prod_i (1-x_i)^{-1} \cdot \prod_{i<j} (1-x_i x_j)^{-1} = \sum_\lambda s_\lambda(x) \implies \boxed{\operatorname{ex} F(x) = e^{u+\frac{u^2}{2}}}.$$

Следствие

Пусть inv(n) *— число инволюций в* $\mathfrak{S}_n$. *Тогда*

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} \operatorname{inv}(n) \frac{u^n}{n!} = e^{u+\frac{u^2}{2}}}.$$

Доказательство:

$$\operatorname{ex} F(x) = \sum_\lambda \operatorname{ex} s_\lambda = \sum_\lambda \dim \lambda \cdot \frac{u^{|\lambda|}}{|\lambda|!} = \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \dim \lambda = \sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!} \operatorname{inv}(n).$$

Тождество Якоби–Труди

Теорема (тождество Якоби–Труди)

Пусть $\ell(\lambda) \leq n$ *и* $\mu \subseteq \lambda$. *Тогда* $\boxed{s_{\lambda/\mu} = \det\left(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j}\right)_{i,j=1}^{n}}$, *где мы полагаем* $h_0 = 1$ *и* $h_k = 0$ *при* $k < 0$.

Тождество Якоби–Труди

Теорема (тождество Якоби–Труди)

Пусть $\ell(\lambda) \leq n$ *и* $\mu \subseteq \lambda$. *Тогда* $\boxed{s_{\lambda/\mu} = \det\left(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j}\right)_{i,j=1}^{n}}$, *где мы полагаем* $h_0 = 1$ *и* $h_k = 0$ *при* $k < 0$.

Доказательство.

- $\sum\limits_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(x)s_\lambda(y) = \sum\limits_{\lambda,\nu} c^{\lambda}_{\mu\nu} s_\nu(x)s_\lambda(y) = \sum\limits_{\nu} s_\nu(x)s_\mu(y)s_\nu(y) =$
  $= s_\mu(y)\sum\limits_{\nu} h_\nu(x)m_\nu(y).$

Тождество Якоби–Труди

Теорема (тождество Якоби–Труди)

Пусть $\ell(\lambda) \le n$ *и* $\mu \subseteq \lambda$. *Тогда* $\boxed{s_{\lambda/\mu} = \det\left(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\right)_{i,j=1}^{n}}$, *где мы полагаем* $h_0 = 1$ *и* $h_k = 0$ *при* $k < 0$.

Доказательство.

- $\sum_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(x)s_\lambda(y) = \sum_{\lambda,\nu} c^{\lambda}_{\mu\nu} s_\nu(x)s_\lambda(y) = \sum_{\nu} s_\nu(x)s_\mu(y)s_\nu(y) =$
  $= s_\mu(y)\sum_{\nu} h_\nu(x)m_\nu(y)$.
- Умножим на $a_\delta(y) = a_\delta(y_1, \ldots, y_n)$:
  $\sum_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(x)a_{\lambda+\delta}(y) = (\sum_{\nu} h_\nu(x)m_\nu(y))a_{\mu+\delta}(y) =$
  $= (\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} h_\alpha(x)y^\alpha)(\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon_w y^{w(\mu+\delta)}) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_n}\sum_{\alpha} \varepsilon_w h_\alpha(x)y^{\alpha+w(\mu+\delta)}$.

Тождество Якоби–Труди

Теорема (тождество Якоби–Труди)

Пусть $\ell(\lambda) \leq n$ *и* $\mu \subseteq \lambda$. *Тогда* $\boxed{s_{\lambda/\mu} = \det\left(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j}\right)_{i,j=1}^{n}}$, *где мы полагаем* $h_0 = 1$ *и* $h_k = 0$ *при* $k < 0$.

Доказательство.

- $\sum_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(x) s_\lambda(y) = \sum_{\lambda,\nu} c^{\lambda}_{\mu\nu} s_\nu(x) s_\lambda(y) = \sum_{\nu} s_\nu(x) s_\mu(y) s_\nu(y) =$
  $= s_\mu(y) \sum_{\nu} h_\nu(x) m_\nu(y)$.
- Умножим на $a_\delta(y) = a_\delta(y_1, \ldots, y_n)$:
  $\sum_{\lambda} s_{\lambda/\mu}(x) a_{\lambda+\delta}(y) = (\sum_{\nu} h_\nu(x) m_\nu(y)) a_{\mu+\delta}(y) =$
  $= (\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} h_\alpha(x) y^\alpha)(\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_w y^{w(\mu+\delta)}) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\alpha} \varepsilon_w h_\alpha(x) y^{\alpha + w(\mu+\delta)}$.
- Рассмотрим $[y^{\lambda+\delta}]$ (нужны слагаемые с $\alpha + w(\mu+\delta) = \lambda + \delta$):
  $s_{\lambda/\mu}(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon_w h_{\lambda+\delta-w(\mu+\delta)}(x) = \det(h_{\lambda_i - \mu_j - i + j}(x))_{i,j=1}^{n}$.

Тождество Якоби–Труди

Теорема (тождество Якоби–Труди)

Пусть $\ell(\lambda) \leq n$ *и* $\mu \subseteq \lambda$*. Тогда* $\boxed{s_{\lambda/\mu} = \det\left(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\right)_{i,j=1}^{n}}$*, где мы полагаем* $h_0 = 1$ *и* $h_k = 0$ *при* $k < 0$*.*

В частности, $\boxed{s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i-i+j}\right)_{i,j=1}^{n}}$ при $\ell(\lambda) \leq n$.

Тождество Якоби–Труди

Теорема (тождество Якоби–Труди)

Пусть $\ell(\lambda) \le n$ *и* $\mu \subseteq \lambda$*. Тогда* $\boxed{s_{\lambda/\mu} = \det\left(h_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\right)_{i,j=1}^{n}}$, *где мы полагаем* $h_0 = 1$ *и* $h_k = 0$ *при* $k < 0$*.*

В частности, $\boxed{s_\lambda = \det\left(h_{\lambda_i-i+j}\right)_{i,j=1}^{n}}$ при $\ell(\lambda) \le n$.

Следствие (двойственное тождество Якоби–Труди)

$\lambda_1 \le n,\ \mu \subseteq \lambda \implies s_{\lambda/\mu} = \det\left(e_{\lambda'_i-\mu'_j-i+j}\right)_{i,j=1}^{n}.$

В частности, $\boxed{s_\lambda = \det\left(e_{\lambda'_i-i+j}\right)_{i,j=1}^{n}}$ при $\lambda_1 \le n$.

Пример. $\lambda = (32) \implies s_{(32)} = \det \begin{pmatrix} h_3 & h_4 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} = h_3 h_2 - h_4 h_1 =$

$$= \det \begin{pmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & e_1 \end{pmatrix} = e_2^2 e_1 + e_4 e_1 - e_3 e_1^2 - e_3 e_2.$$

Пример. $\lambda = (32) \implies s_{(32)} = \det \begin{pmatrix} h_3 & h_4 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} = h_3 h_2 - h_4 h_1 =$

$$= \det \begin{pmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & e_1 \end{pmatrix} = e_2^2 e_1 + e_4 e_1 - e_3 e_1^2 - e_3 e_2.$$

Следствие (формула Эйткена)

$|\lambda/\mu| = N,\ \ell(\lambda) \le n \implies$

$$\boxed{\dim(\lambda/\mu) = N!\ \det \left(\frac{1}{(\lambda_i - \mu_j - i + j)!} \right)_{i,j=1}^{n}}.$$

В частности, $\boxed{\dim \lambda = N!\ \det \left(\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right)_{i,j=1}^{n}}.$

Пример. $\lambda = (32) \implies s_{(32)} = \det \begin{pmatrix} h_3 & h_4 \\ h_1 & h_2 \end{pmatrix} = h_3 h_2 - h_4 h_1 =$

$$= \det \begin{pmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & e_1 \end{pmatrix} = e_2^2 e_1 + e_4 e_1 - e_3 e_1^2 - e_3 e_2.$$

Следствие (формула Эйткена)

$|\lambda/\mu| = N$, $\ell(\lambda) \le n \implies$

$$\boxed{\dim(\lambda/\mu) = N!\ \det \left(\frac{1}{(\lambda_i - \mu_j - i + j)!} \right)_{i,j=1}^{n}}.$$

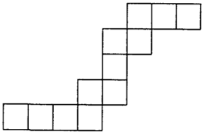
В частности, $\boxed{\dim \lambda = N!\ \det \left(\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right)_{i,j=1}^{n}}$.

Доказательство. Применим ex_1 к тождеству Якоби–Труди. Было: $\mathrm{ex}_1(s_{\lambda/\mu}) = \frac{\dim(\lambda/\mu)}{N!}$, $\mathrm{ex}_1(h_m) = 1/m! \implies$ QED.

Косые крюки

- λ/μ связная $\iff$ любые две клетки соединены путём по клеткам.
- λ/μ — косой крюк $\iff$ связная и не содержит квадратиков 2×2.
- Высота косого крюка $\mathrm{ht}(B) :=$ число строк минус 1.

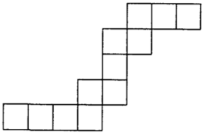
Пример: $86554/5443$ — косой крюк высоты 4.



Косые крюки

- λ/μ связная $\iff$ любые две клетки соединены путём по клеткам.
- λ/μ — косой крюк $\iff$ связная и не содержит квадратиков 2×2.
- Высота косого крюка $\mathrm{ht}(B) :=$ число строк минус 1.

Пример: $86554/5443$ — косой крюк высоты 4.

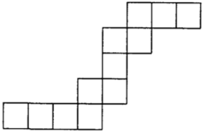


- **Наблюдение:** λ/μ — косой крюк $\iff$ число клеток в строке j косого крюка (кроме первой) равно $\mu_j - \mu_{j+1} + 1$.

Косые крюки

- λ/μ связная $\iff$ любые две клетки соединены путём по клеткам.
- λ/μ — косой крюк $\iff$ связная и не содержит квадратиков 2×2.
- Высота косого крюка $\mathrm{ht}(B) :=$ число строк минус 1.

Пример: $86554/5443$ — косой крюк высоты 4.



- **Наблюдение:** λ/μ — косой крюк $\iff$ число клеток в строке j косого крюка (кроме первой) равно $\mu_j - \mu_{j+1} + 1$.
- $\mathrm{BS}(n)$ — множество косых крюков размера n.
- Полагаем $\mathrm{BS}(0) := \{\emptyset\}$ и считаем, что $\mathrm{ht}(\emptyset) = 0$.
- ($\star$) Сколько существует косых крюков размера n (с точностью до сдвига)?

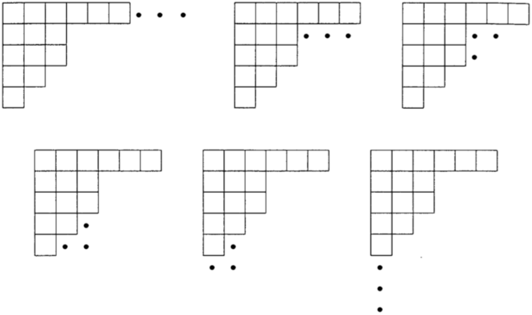
Теорема

$$\boxed{s_\mu p_r = \sum_{\lambda\colon\ \lambda/\mu \in \mathrm{BS}(r)} (-1)^{\mathrm{ht}(\lambda/\mu)} s_\lambda}.$$

Теорема

$$\boxed{s_\mu p_r = \sum_{\lambda:\ \lambda/\mu\in\mathrm{BS}(r)} (-1)^{\mathrm{ht}(\lambda/\mu)} s_\lambda}.$$

- **Пример:**

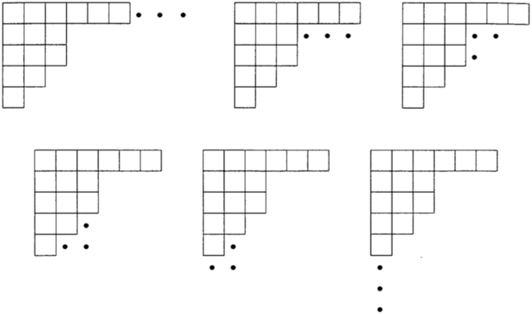


$$\mu = 63321 \implies s_{63321}p_3 =$$
$$= s_{93321} + s_{66321} - s_{65421} -$$
$$- s_{63333} - s_{633222} + s_{63321111}.$$

Теорема

$$\boxed{s_\mu p_r = \sum_{\lambda:\ \lambda/\mu \in \mathrm{BS}(r)} (-1)^{\mathrm{ht}(\lambda/\mu)} s_\lambda}.$$

- **Пример:**



$\mu = 63321 \implies s_{63321} p_3 =$
$= s_{93321} + s_{66321} - s_{65421} -$
$- s_{63333} - s_{633222} + s_{63321111}.$

- $(\bigstar)$ $\delta = (n-1, n-2, \ldots, 0) \implies s_\delta p_2 = ?$

Доказательство теоремы

- Фиксируем n, все функции — от $x_1, \ldots, x_n$.
- $a_{\mu+\delta} = \sum\limits_{w \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(w) w(x^{\mu+\delta}) \implies a_{\mu+\delta} p_r = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{\mu+\delta+r\varepsilon_j}$, где $\varepsilon_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (единица на j-м месте).

Доказательство теоремы

- Фиксируем n, все функции — от $x_1, \ldots, x_n$.
- $a_{\mu+\delta} = \sum\limits_{w \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(w) w(x^{\mu+\delta}) \implies a_{\mu+\delta} p_r = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{\mu+\delta+r\varepsilon_j}$, где $\varepsilon_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (единица на j-м месте).
- Упорядочим элементы $\mu + \delta + r\varepsilon_j$ по убыванию.
    - Если есть равные — вклад нулевой.
    - Иначе $\exists\ p \le j$: $\mu_{p-1} + n - p + 1 > \mu_j + n - j + r > \mu_p + n - p$.

Доказательство теоремы

- Фиксируем n, все функции — от $x_1, \dots, x_n$.
- $a_{\mu+\delta} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(w) w(x^{\mu+\delta}) \implies a_{\mu+\delta} p_r = \sum_{j=1}^{n} a_{\mu+\delta+r\varepsilon_j}$, где $\varepsilon_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на j-м месте).
- Упорядочим элементы $\mu + \delta + r\varepsilon_j$ по убыванию.
  - Если есть равные — вклад нулевой.
  - Иначе $\exists\ p \le j$: $\mu_{p-1} + n - p + 1 > \mu_j + n - j + r > \mu_p + n - p$.
- Тогда $a_{\mu+\delta+r\epsilon_j} = (-1)^{j-p} a_{\lambda+\delta}$, где $\lambda = (\mu_1, \dots, \mu_{p-1}, \mu_j + p - j + r, \mu_p + 1, \dots, \mu_{j-1} + 1, \mu_{j+1}, \dots, \mu_n)$.

Доказательство теоремы

- Фиксируем n, все функции — от $x_1, \dots, x_n$.
- $a_{\mu+\delta} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(w) w(x^{\mu+\delta}) \implies a_{\mu+\delta} p_r = \sum_{j=1}^{n} a_{\mu+\delta+r\varepsilon_j}$, где $\varepsilon_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на j-м месте).
- Упорядочим элементы $\mu + \delta + r\varepsilon_j$ по убыванию.
  - Если есть равные — вклад нулевой.
  - Иначе $\exists\ p \leq j$: $\mu_{p-1} + n - p + 1 > \mu_j + n - j + r > \mu_p + n - p$.
- Тогда $a_{\mu+\delta+r\epsilon_j} = (-1)^{j-p} a_{\lambda+\delta}$, где $\lambda = (\mu_1, \dots, \mu_{p-1}, \mu_j + p - j + r, \mu_p + 1, \dots, \mu_{j-1} + 1, \mu_{j+1}, \dots, \mu_n)$.
- Но это в точности разбиения: $\lambda/\mu \in \mathrm{BS}(r)$ и $\mathrm{ht}(\lambda/\mu) = j - p \implies$ $a_{\mu+\delta} p_r = \sum_{\lambda \text{ как надо}} (-1)^{\mathrm{ht}(\lambda/\mu)} a_{\lambda+\delta}$.

Доказательство теоремы

- Фиксируем n, все функции — от $x_1, \dots, x_n$.
- $a_{\mu+\delta} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(w) w(x^{\mu+\delta}) \implies a_{\mu+\delta} p_r = \sum_{j=1}^{n} a_{\mu+\delta+r\varepsilon_j}$, где $\varepsilon_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (единица на j-м месте).
- Упорядочим элементы $\mu + \delta + r\varepsilon_j$ по убыванию.
  - Если есть равные — вклад нулевой.
  - Иначе $\exists\ p \leq j$: $\mu_{p-1} + n - p + 1 > \mu_j + n - j + r > \mu_p + n - p$.
- Тогда $a_{\mu+\delta+r\epsilon_j} = (-1)^{j-p} a_{\lambda+\delta}$, где $\lambda = (\mu_1, \dots, \mu_{p-1}, \mu_j + p - j + r, \mu_p + 1, \dots, \mu_{j-1} + 1, \mu_{j+1}, \dots, \mu_n)$.
- Но это в точности разбиения: $\lambda/\mu \in \mathrm{BS}(r)$ и $\mathrm{ht}(\lambda/\mu) = j - p \implies a_{\mu+\delta} p_r = \sum_{\lambda \text{ как надо}} (-1)^{\mathrm{ht}(\lambda/\mu)} a_{\lambda+\delta}$.
- Осталось разделить на a_δ и устремить $n \to \infty$.

Таблицы косых крюков

- Таблица косых крюков формы λ/μ, где $|\lambda/\mu| = n$, типа $\alpha \in W_n$ — заполнение клеток λ/μ так, чтобы:
  - нестрогое возрастание по строкам и столбцам,
  - число i появляется α_i раз;
  - множество клеток, занятых i, есть косой крюк.

Пример. Таблица T косых крюков формы 7555 и типа $(5, 2, 3, 0, 5, 7)$:

1	1	1	1	6	6	6
1	2	2	5	6		
3	3	5	5	6		
3	5	5	6	6		

Таблицы косых крюков

- Таблица косых крюков формы λ/μ, где $|\lambda/\mu| = n$, типа $\alpha \in W_n$ — заполнение клеток λ/μ так, чтобы:
  - нестрогое возрастание по строкам и столбцам,
  - число i появляется α_i раз;
  - множество клеток, занятых i, есть косой крюк.

Пример. Таблица T косых крюков формы 7555 и типа $(5, 2, 3, 0, 5, 7)$:

1	1	1	1	6	6	6
1	2	2	5	6		
3	3	5	5	6		
3	5	5	6	6		

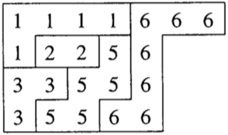
- Эквивалентно: последовательность разбиений $\mu = \lambda^0 \subseteq \lambda^1 \subseteq \cdots \subseteq \lambda^r = \lambda$, где $\lambda^i/\lambda^{i-1} \in \mathrm{BS}(\alpha_i)$.

Пример: $\mu = \lambda^{(0)} = \emptyset$, $\lambda^{(1)} = (41)$, $\lambda^{(2)} = (43)$, $\lambda^{(3)} = (4321)$, $\lambda^{(4)} = (4321)$, $\lambda^{(5)} = (4^3 3)$, $\lambda^{(6)} = \lambda = (75^3)$.

Таблицы косых крюков

- **Таблица косых крюков** формы λ/μ, где $|\lambda/\mu| = n$, типа $\alpha \in W_n$ — заполнение клеток λ/μ так, чтобы:
  - нестрогое возрастание по строкам и столбцам,
  - число i появляется α_i раз;
  - множество клеток, занятых i, есть косой крюк.

Пример. Таблица T косых крюков формы 7555 и типа $(5, 2, 3, 0, 5, 7)$:



- $\mathrm{BST}(\lambda/\mu, \alpha)$ — множество таблиц косых крюков формы λ/μ и типа α.
- **Высота** таблицы косых крюков: $\mathrm{ht}(T) = \mathrm{ht}(B_1) + \ldots + \mathrm{ht}(B_r)$.

Пример: $\mathrm{ht}(T) = 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 7$.

Теорема

$\boxed{s_\mu p_\alpha = \sum_\lambda \chi^{\lambda/\mu}(\alpha) s_\lambda}$, *где* $\boxed{\chi^{\lambda/\mu}(\alpha) := \sum_{T \in \mathrm{BST}(\lambda/\mu, \alpha)} (-1)^{\mathrm{ht}(T)}}$.

Доказательство: последовательно домножить s_μ на $p_{\alpha_1}, p_{\alpha_2}, \ldots$.

Теорема

$\boxed{s_\mu p_\alpha = \sum_\lambda \chi^{\lambda/\mu}(\alpha) s_\lambda}$, *где* $\boxed{\chi^{\lambda/\mu}(\alpha) := \sum_{T \in \mathrm{BST}(\lambda/\mu,\alpha)} (-1)^{\mathrm{ht}(T)}}$.

Следствие

- $\boxed{p_\alpha = \sum_\lambda \chi^\lambda(\alpha) s_\lambda}$.
- $\boxed{\chi^\lambda(\alpha) = \left[x^{\lambda+\delta}\right] p_\alpha a_\delta}$ *(от n переменных, где $n \geq \ell(\lambda)$).*

Теорема

$\boxed{s_\mu p_\alpha = \sum_\lambda \chi^{\lambda/\mu}(\alpha) s_\lambda}$, *где* $\boxed{\chi^{\lambda/\mu}(\alpha) := \sum_{T \in \mathrm{BST}(\lambda/\mu, \alpha)} (-1)^{\mathrm{ht}(T)}}$.

Следствие

- $\boxed{p_\alpha = \sum_\lambda \chi^\lambda(\alpha) s_\lambda}$.
- $\boxed{\chi^\lambda(\alpha) = \left[x^{\lambda+\delta}\right] p_\alpha a_\delta}$ *(от n переменных, где $n \geq \ell(\lambda)$).*

Следствие

$\chi^\lambda(\alpha)$ *не зависит от порядка элементов в* α*!*

Теорема

$\boxed{s_\mu p_\alpha = \sum_\lambda \chi^{\lambda/\mu}(\alpha) s_\lambda}$, *где* $\boxed{\chi^{\lambda/\mu}(\alpha) := \sum_{T \in \mathrm{BST}(\lambda/\mu,\alpha)} (-1)^{\mathrm{ht}(T)}}$.

Следствие

- $\boxed{p_\alpha = \sum_\lambda \chi^\lambda(\alpha) s_\lambda}$.
- $\boxed{\chi^\lambda(\alpha) = \left[x^{\lambda+\delta}\right] p_\alpha a_\delta}$ *(от n переменных, где $n \geq \ell(\lambda)$).*

Следствие

$\chi^\lambda(\alpha)$ *не зависит от порядка элементов в* α*!*

($\bigstar$) s_δ — многочлен от нечётных степенных сумм $p_1, p_3, \ldots$.

Правило Мурнагана–Накаямы

Следствие (правило Мурнагана–Накаямы)

$\boxed{s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} \frac{1}{z_\nu} \chi^{\lambda/\mu}(\nu) p_\nu}$. *В частности,* $\boxed{s_\lambda = \sum_{\nu} \frac{1}{z_\nu} \chi^{\lambda}(\nu) p_\nu}$.

Доказательство: $\chi^{\lambda/\mu}(\nu) = \langle s_\mu p_\nu, s_\lambda \rangle = \langle p_\nu, s_{\lambda/\mu} \rangle \implies$ QED.

Правило Мурнагана–Накаямы

Следствие (правило Мурнагана–Накаямы)

$\boxed{s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} \frac{1}{z_\nu} \chi^{\lambda/\mu}(\nu) p_\nu}$. *В частности,* $\boxed{s_\lambda = \sum_{\nu} \frac{1}{z_\nu} \chi^{\lambda}(\nu) p_\nu}$.

Доказательство: $\chi^{\lambda/\mu}(\nu) = \langle s_\mu p_\nu, s_\lambda \rangle = \langle p_\nu, s_{\lambda/\mu} \rangle \implies$ QED.

Чуть позже мы установим, что обозначение $\chi^\lambda(\mu)$ неспроста — это значения неприводимых характеров симметрической группы!

Соотношения ортогональности

Предложение (соотношения ортогональности)

(a) $\sum_{\lambda} \chi^{\lambda}(\mu)\chi^{\lambda}(\nu) = z_{\mu}\delta_{\mu\nu}$ *при фиксированных* μ, ν.

(b) $\sum_{\nu} z_{\nu}^{-1}\chi^{\lambda}(\nu)\chi^{\mu}(\nu) = \delta_{\lambda\mu}$ *при фиксированных* λ, μ.

Соотношения ортогональности

Предложение (соотношения ортогональности)

(a) $\sum\limits_{\lambda} \chi^{\lambda}(\mu)\chi^{\lambda}(\nu) = z_{\mu}\delta_{\mu\nu}$ *при фиксированных* μ, ν.

(b) $\sum\limits_{\nu} z_{\nu}^{-1}\chi^{\lambda}(\nu)\chi^{\mu}(\nu) = \delta_{\lambda\mu}$ *при фиксированных* λ, μ.

Доказательство:

(a) $\sum\limits_{\lambda} \chi^{\lambda}(\mu)\chi^{\lambda}(\nu) = \langle p_{\mu}, p_{\nu}\rangle = z_{\mu}\delta_{\mu\nu}$.

(b) $\sum\limits_{\nu} z_{\nu}^{-1}\chi^{\lambda}(\nu)\chi^{\mu}(\nu) = \langle s_{\lambda}, s_{\mu}\rangle = \delta_{\lambda\mu}$.

Соотношения ортогональности

Предложение (соотношения ортогональности)

(a) $\sum_{\lambda} \chi^{\lambda}(\mu)\chi^{\lambda}(\nu) = z_{\mu}\delta_{\mu\nu}$ *при фиксированных* μ, ν.

(b) $\sum_{\nu} z_{\nu}^{-1}\chi^{\lambda}(\nu)\chi^{\mu}(\nu) = \delta_{\lambda\mu}$ *при фиксированных* λ, μ.

Замечание. Предложение $\iff$ матрица $\left(\chi^{\lambda}(\mu) z_{\mu}^{-1/2}\right)_{\lambda,\mu\vdash n}$ ортогональна (как матрица перехода между ортонормированными базисами $\{s_{\lambda}\}$ и $\{p_{\mu} z_{\mu}^{-1/2}\}$).