Теория представлений симметрических групп

Лекция 9. Правило Мурнагана–Накаямы

Н. В. Цилевич

29 октября 2021 г.

Об инвариантных и циклических векторах

Пусть (V, ρ) – представление группы G и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантное скалярное произведение на V (относительно которого ρ унитарно).

- $v \in V$ – инвариантный вектор $\iff$ $\rho(g)v = v$ для любой $g \in G$.
- V^G = пространство инвариантных векторов.
- $\dim V^G = \langle \mathrm{id}_G, \rho \rangle$ – кратность тривиального представления в ρ.

Об инвариантных и циклических векторах

Пусть (V, ρ) – представление группы G и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантное скалярное произведение на V (относительно которого ρ унитарно).

- $v \in V$ – инвариантный вектор $\iff$ $\rho(g)v = v$ для любой $g \in G$.
- V^G = пространство инвариантных векторов.
- $\dim V^G = \langle \mathrm{id}_G, \rho \rangle$ – кратность тривиального представления в ρ.

Лемма

(1) *Пусть $u \in V^G$, $u \neq 0$. Если $\langle u, v \rangle = 0$, то v не циклический.*

(2) *Если существует циклический $v \in V$ и $g \in G$, такой, что $\rho(g)v = \lambda v$, где $\lambda \neq 1$, то $V^G = 0$.*

Об инвариантных и циклических векторах

Пусть (V, ρ) – представление группы G и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – инвариантное скалярное произведение на V (относительно которого ρ унитарно).

- $v \in V$ – инвариантный вектор $\iff$ $\rho(g)v = v$ для любой $g \in G$.
- V^G = пространство инвариантных векторов.
- $\dim V^G = \langle \mathrm{id}_G, \rho \rangle$ – кратность тривиального представления в ρ.

Лемма

(1) *Пусть $u \in V^G$, $u \neq 0$. Если $\langle u, v \rangle = 0$, то v не циклический.*

(2) *Если существует циклический $v \in V$ и $g \in G$, такой, что $\rho(g)v = \lambda v$, где $\lambda \neq 1$, то $V^G = 0$.*

Доказательство.

(1) Имеем $v \in \langle u \rangle^\perp$, а это собственное инвариантное подпространство в V $\implies$ v не циклический.

(2) Пусть $u \in V^G$ $\implies$ $\rho(g)u = u$ $\implies$ u и v – с.в. унитарного оператора $\rho(g)$ с разными с.ч. $\implies$ $u \perp v$ $\implies$ $u = 0$ по п. (1).

Лемма (о кратности тривиального представления в косом)

$$\langle \mathrm{id}_k, \pi_{\lambda/\mu} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } \lambda/\mu \text{ \textit{– горизонтальная полоса}}, \\ 0 & \text{\textit{иначе.}} \end{cases}$$

Лемма (о кратности тривиального представления в косом)

$$\langle \mathrm{id}_k, \pi_{\lambda/\mu} \rangle = \begin{cases} 1, & \textit{если } \lambda/\mu \textit{ – горизонтальная полоса}, \\ 0 & \textit{иначе}. \end{cases}$$

Доказательство.

- Если λ/μ – горизонтальная полоса, то $\pi_{\lambda/\mu}$ – перестановочное представление (для транзитивного действия) $\implies$ кратность тривиального в нём равна 1.
- Если λ/μ – не горизонтальная полоса, то в ней есть две связных строки $\implies$ существует $T \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$: i и $i+1$ в одном столбце $\implies$ $s_i w_T = -w_T$ $\implies$ нашли циклический вектор с с.ч. -1 $\implies$ $\pi_{\lambda/\mu}$ не содержит тривиального подпредставления.

Следствие

Пусть $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n-k$. *Тогда*

$$\langle \pi_\mu \otimes \pi_{(k)}, \operatorname{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-k}\times\mathfrak{S}_k} \pi_\lambda \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu \subset \lambda \text{ и } \lambda/\mu \text{ – гориз. полоса,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следствие

Пусть $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n-k$. *Тогда*

$$\langle \pi_\mu \otimes \pi_{(k)}, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-k}\times\mathfrak{S}_k} \pi_\lambda \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu \subset \lambda \text{ и } \lambda/\mu \text{ – гориз. полоса,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство: $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-k}\times\mathfrak{S}_k} \pi_\lambda = \sum_{\nu\subset\lambda} \pi_\nu \otimes \pi_{\lambda/\nu} \implies$ $\langle \pi_\mu \otimes \pi_{(k)}, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-k}\times\mathfrak{S}_k} \pi_\lambda \rangle = \sum_{\nu\subset\lambda} \langle \pi_\mu \otimes \pi_{(k)}, \pi_\nu \otimes \pi_{\lambda/\nu} \rangle$ = QED по лемме.

Правило Пиери

Следствие (правило Пиери)

Пусть $\mu \vdash n - k$*. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-k} \times \mathfrak{S}_k}^{\mathfrak{S}_n} (\pi_\mu \otimes \pi_{(k)}) = \bigoplus_{\lambda/\mu \text{ – гориз. полоса}} \pi_\lambda.$$

Доказательство: применить взаимность Фробениуса.

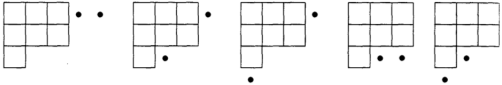
Правило Пиери

Следствие (правило Пиери)

Пусть $\mu \vdash n-k$. *Тогда*

$$\operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-k}\times\mathfrak{S}_k}^{\mathfrak{S}_n}(\pi_\mu\otimes\pi_{(k)})=\bigoplus_{\lambda/\mu\text{ – гориз. полоса}}\pi_\lambda.$$

Пример. Все способы добавить 2-горизонтальную полосу к (3^21):



$$\implies \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_7\times\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_9}(\pi_{(3^21)}\otimes\pi_{(2)})=\pi_{(531)}+\pi_{(432)}+\pi_{(431^2)}+\pi_{(3^3)}+\pi_{(3^221)}.$$

Напоминание

Наша цель – доказать формулу Мурнагана–Накаямы, позволяющую вычислять характеры неприводимых представлений симметрических групп. Подытожим, что уже доказали.

Теорема

При $\lambda \vdash n$ имеем $\chi^\lambda((n)) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{если } \lambda = (n-k, 1^k), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

Следствие (доказательства теоремы о косых представлениях)

$$\operatorname{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-k} \times \mathfrak{S}_k} \pi_\lambda = \sum_{\mu \vdash n-k,\, \mu \subset \lambda} \pi_\mu \otimes \pi_{\lambda/\mu}.$$

В частности, $\pi_{\lambda/\mu}$ содержится в $\operatorname{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-k} \times \mathfrak{S}_k} \pi_\lambda$ для любой $\mu \subset \lambda$, $\mu \vdash n-k$.

Напоминание

Лемма (о цикличности векторов Юнга)

Для любой $T \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$ *вектор* w_T *– циклический в* $\pi_{\lambda/\mu}$.

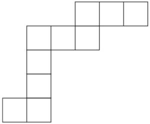
Лемма (о несвязных строках)

Пусть $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n-k$, $\mu \subset \lambda$, *и пусть* λ/μ *распадается в объединение несвязных кусков* θ/ν *и* η/τ, *где* $|\theta/\nu| = m$ *и* $|\eta/\tau| = k-m$. *Тогда*

$$\pi_{\lambda/\mu} \simeq \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{k-m}}^{\mathfrak{S}_k}(\pi_{\theta/\nu} \otimes \pi_{\eta/\tau}).$$

Косые крюки

- Косой крюк = связная косая диаграмма, не содержащая квадратиков 2×2.



- Косая диаграмма – косой крюк $\iff$ её вектор содержаний – целочисленный интервал.
- Высота $\mathrm{ht}(\lambda/\mu)$ косого крюка λ/μ = число строк минус 1.

  В примере выше высота $= 4$.

(★) Сколько косых крюков имеет диаграмма размера n?

Теорема (о крюковых представлениях)

Пусть λ/μ *связна и* $\gamma = (k - h, 1^h)$ *– крюк высоты* h.

$$\langle \pi_\gamma, \pi_{\lambda/\mu} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda/\mu \text{ – косой крюк высоты } h, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема (о крюковых представлениях)

Пусть λ/μ *связна и* $\gamma = (k-h, 1^h)$ *– крюк высоты* h*.*

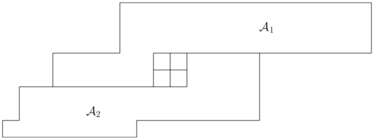
$$\langle \pi_\gamma, \pi_{\lambda/\mu} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda/\mu \text{ – косой крюк высоты } h, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

План доказательства:

1. Если λ/μ – не косой крюк, то $\pi_{\lambda/\mu}$ не содержит π_γ.
2. Если λ/μ – косой крюк, но $\mathrm{ht}(\lambda/\mu) \neq h$, то $\pi_{\lambda/\mu}$ не содержит π_γ.
3. Если λ/μ – косой крюк и $\mathrm{ht}(\lambda/\mu) = h$, то $\pi_{\lambda/\mu}$ содержит π_γ с кратностью 1.

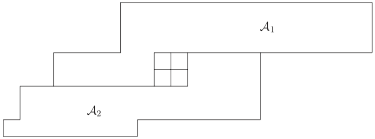
Доказательство теоремы

- **Шаг 1.** Пусть λ/μ – не косой крюк $\implies$ λ/μ содержит квадратик 2×2 $\implies$ $\exists T_0 \in \mathsf{SYT}(\lambda/\mu)$: в этом квадратике стоят четыре последовательных числа $j, j+1, j+2, j+3$ (последовательно заполним сначала $\mathcal{A}_1$, потом квадратик, потом $\mathcal{A}_2$).



Доказательство теоремы

- **Шаг 1.** Пусть λ/μ – не косой крюк $\implies$ λ/μ содержит квадратик 2×2 $\implies$ $\exists T_0 \in \mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$: в этом квадратике стоят четыре последовательных числа $j, j+1, j+2, j+3$ (последовательно заполним сначала $\mathcal{A}_1$, потом квадратик, потом $\mathcal{A}_2$).



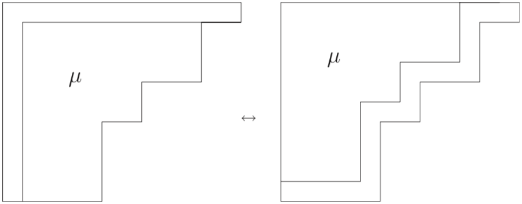
- $W :=$ подпространство, натянутое на w_T: в квадратике – эти четыре числа, а в остальном T совпадает с T_0.
- $\mathfrak{S}_4$ действует на $\{j, j+1, j+2, j+3\}$. Ортогональная форма Юнга $\implies$ W инвариантно относительно $\mathfrak{S}_4$ и $W \simeq \pi_{(2^2)}$.
- γ не содержит квадратик 2×2 $\implies$ $\langle \pi_{(2^2)}, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_k}_{\mathfrak{S}_4} \pi_\gamma \rangle = 0$ $\implies$ $\langle \pi_\gamma, \mathrm{Ind}^{\mathfrak{S}_k}_{\mathfrak{S}_4} \pi_{(2^2)} \rangle = 0$.

- Рассмотрим естественное вложение $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_4}^{\mathfrak{S}_k} \pi_{(2^2)} \simeq \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} sW \to V^{\lambda/\mu}$, где $\mathcal{S}$ – система представителей классов смежности $\mathfrak{S}_k/\mathfrak{S}_4$: $sw \mapsto \pi_{\lambda/\mu}(s)w$. Это сюръективный (но не инъективный!) сплетающий оператор ($\star$) .
- $\langle \pi_\gamma, \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_4}^{\mathfrak{S}_k} \pi_{(2^2)} \rangle = 0 \implies \langle \pi_\gamma, \pi_{\lambda/\mu} \rangle = 0.$

- Рассмотрим естественное вложение $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_4}^{\mathfrak{S}_k} \pi_{(2^2)} \simeq \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} sW \to V^{\lambda/\mu}$, где $\mathcal{S}$ – система представителей классов смежности $\mathfrak{S}_k/\mathfrak{S}_4$: $sw \mapsto \pi_{\lambda/\mu}(s)w$. Это сюръективный (но не инъективный!) сплетающий оператор ($\star$) .
- $\langle \pi_\gamma, \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_4}^{\mathfrak{S}_k} \pi_{(2^2)} \rangle = 0 \implies \langle \pi_\gamma, \pi_{\lambda/\mu} \rangle = 0$.
- **Шаг 2.** Пусть λ/μ – косой крюк, но $\operatorname{ht}(\lambda/\mu) \neq h$. Можно считать, что λ, μ дают минимальную реализацию λ/μ.
  Пусть $\ell(\lambda) = r$. Тогда $\operatorname{ht}(\lambda/\mu) = r - 1$ и $|\lambda/\mu| = k = \lambda_1 + r - 1$.
  - Если $\operatorname{ht}(\lambda/\mu) < h$, то $\ell(\gamma) = h + 1 > r = \ell(\lambda)$.
  - Если $\operatorname{ht}(\lambda/\mu) > h$, то $\gamma_1 = k - h > \lambda_1$.

  В обоих случаях $\gamma \not\subset \lambda \implies \operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_k}^{\mathfrak{S}_n} \pi_\lambda$ не содержит π_γ. Но $\pi_{\lambda/\mu}$ содержится в $\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_k}^{\mathfrak{S}_n} \pi_\lambda \implies$ оно тоже не содержит π_γ.

- **Шаг 3.** Пусть λ/μ – косой крюк, $\mathrm{ht}(\lambda/\mu) = h$, минимальная реализация. Тогда λ/γ имеет форму μ.



- Значит, $\pi_{\lambda/\gamma} \simeq \pi_\mu$. Знаем: $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}} \pi_\lambda = \sum\limits_{\nu \subset \lambda,\, |\nu| = k} \pi_\nu \otimes \pi_{\lambda/\nu}$

$\implies \langle \pi_\gamma \otimes \pi_\mu, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}} \pi_\lambda \rangle = 1.$

- **Шаг 3.** Пусть λ/μ – косой крюк, $\mathrm{ht}(\lambda/\mu) = h$, минимальная реализация. Тогда λ/γ имеет форму μ.
- Значит, $\pi_{\lambda/\gamma} \simeq \pi_\mu$. Знаем: $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}} \pi_\lambda = \sum\limits_{\nu \subset \lambda,\, |\nu| = k} \pi_\nu \otimes \pi_{\lambda/\nu}$
$\implies \langle \pi_\gamma \otimes \pi_\mu, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}} \pi_\lambda \rangle = 1.$
- Осталось: $\langle \pi_\gamma, \pi_{\lambda/\mu} \rangle = \langle \pi_\gamma \otimes \pi_\mu, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}} \pi_\lambda \rangle$.
- ($\bigstar$) $\theta \vdash k$, $\theta \subset \lambda \implies (\lambda/\theta$ – косой крюк $\iff \theta = \mu)$.
- Шаг 1 $\implies$ если $\pi_{\lambda/\theta}$ содержит π_γ, то $\theta = \mu$.
- $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}} \pi_\lambda = \sum\limits_{\theta \subset \lambda,\, |\theta| = n-k} \pi_{\lambda/\theta} \otimes \pi_\theta \implies$ из всех слагаемых содержать $\pi_\gamma \otimes \pi_\mu$ может только $\pi_{\lambda/\mu} \otimes \pi_\mu \implies$ QED.

- **Шаг 3.** Пусть λ/μ – косой крюк, $\mathrm{ht}(\lambda/\mu) = h$, минимальная реализация. Тогда λ/γ имеет форму μ.
- Значит, $\pi_{\lambda/\gamma} \simeq \pi_\mu$. Знаем: $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}} \pi_\lambda = \sum\limits_{\nu \subset \lambda,\, |\nu| = k} \pi_\nu \otimes \pi_{\lambda/\nu}$

  $\Longrightarrow \langle \pi_\gamma \otimes \pi_\mu, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}} \pi_\lambda \rangle = 1.$
- Осталось: $\langle \pi_\gamma, \pi_{\lambda/\mu} \rangle = \langle \pi_\gamma \otimes \pi_\mu, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}} \pi_\lambda \rangle$.
- ($\bigstar$) $\theta \vdash k,\ \theta \subset \lambda \implies (\lambda/\theta$ – косой крюк $\iff \theta = \mu)$.
- Шаг 1 $\implies$ если $\pi_{\lambda/\theta}$ содержит π_γ, то $\theta = \mu$.
- $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}} \pi_\lambda = \sum\limits_{\theta \subset \lambda,\, |\theta| = n-k} \pi_{\lambda/\theta} \otimes \pi_\theta \implies$ из всех слагаемых содержать $\pi_\gamma \otimes \pi_\mu$ может только $\pi_{\lambda/\mu} \otimes \pi_\mu \implies$ QED.

Уфф! Теорема доказана.

До правила Мурнагана–Накаямы осталось ещё чуть-чуть.

Теорема

Пусть λ/μ *– косая диаграмма размера* k. *Тогда*

$$\chi^{\lambda/\mu}((k)) = \begin{cases} (-1)^{\mathrm{ht}(\lambda/\mu)}, & \text{если } \lambda/\mu \text{ – косой крюк,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема

Пусть λ/μ *– косая диаграмма размера* k*. Тогда*

$$\chi^{\lambda/\mu}((k)) = \begin{cases} (-1)^{\mathrm{ht}(\lambda/\mu)}, & \text{если } \lambda/\mu \text{ – косой крюк,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство.

- Пусть λ/μ <u>несвязна</u>. Тогда $\pi_{\lambda/\mu} \simeq \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{k-m}}^{\mathfrak{S}_k} \pi_{\theta/\nu} \otimes \pi_{\eta/\tau}$ для некоторых θ, ν, η, τ.
  Формула Фробениуса: $\chi^{\sigma}(g) = \sum_{s \in \mathcal{S}\colon s^{-1}gs \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{k-m}} \chi^{\rho}(s^{-1}gs)$.
  Но k-цикл не сопряжён ни с каким элементом из $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{k-m}$ $\implies \chi^{\lambda/\mu}((k)) = 0$.

Продолжение доказательства

- Пусть λ/μ связна, но не косой крюк. По теореме о крюковых представлениях $\langle \pi_\gamma, \pi_{\lambda/\mu} \rangle = 0$ для любого крюка $\gamma \vdash k$. Но по теореме о значениях неприводимых характеров на одноцикловых перестановках $\chi^\nu((k)) \neq 0$ только для крюков $\nu \implies \chi^{\lambda/\mu}((k)) = 0$.

Продолжение доказательства

- Пусть λ/μ связна, но не косой крюк. По теореме о крюковых представлениях $\langle \pi_\gamma, \pi_{\lambda/\mu} \rangle = 0$ для любого крюка $\gamma \vdash k$. Но по теореме о значениях неприводимых характеров на одноцикловых перестановках $\chi^\nu((k)) \neq 0$ только для крюков $\nu \implies \chi^{\lambda/\mu}((k)) = 0$.
- Пусть λ/μ – косой крюк высоты h. По теореме о крюковых представлениях $\pi_{(k-h,1^h)}$ – единственное крюковое представление, содержащееся в $\pi_{\lambda/\mu}$, причём оно содержится с кратностью 1 $\implies$ QED по теореме о значениях неприводимых характеров на одноцикловых перестановках.

Теорема (правило Мурнагана–Накаямы)

Пусть λ/μ *– косая диаграмма размера* k *и* $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ *– перестановка циклового типа* $\beta = (b_1, \ldots, b_\ell) \in \mathrm{Comp}(n)$*. Тогда*

$$\chi^{\lambda/\mu}(\sigma) = \sum_S (-1)^{\mathrm{ht}(S)},$$

где сумма – по всем последовательностям
$S = (\mu = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \ldots \subset \lambda^{(\ell-1)} \subset \lambda^{(\ell)} = \lambda)$,
где $\lambda^{(j+1)}/\lambda^{(j)}$ *– косой крюк размера* b_j *и* $\mathrm{ht}(S) = \sum_{j=0}^{\ell-1} \mathrm{ht}(\lambda^{(j+1)}/\lambda^{(j)})$*.*

Доказательство правила Мурнагана–Накаямы

- Было: $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_\beta} \pi_{\lambda/\mu} = \sum \pi_{\lambda^{(1)}/\mu} \otimes \pi_{\lambda^{(2)}/\lambda^{(1)}} \otimes \ldots \otimes \pi_{\lambda/\lambda^{(\ell-1)}}$, сумма – по всем последовательностям $S = (\mu = \lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \ldots \subset \lambda^{(\ell-1)} \subset \lambda^{(\ell)} = \lambda)$, где $|\lambda^{(i)}/\lambda^{(i-1)}| = b_i$, $i = 1, \ldots, \ell - 1$.
- Пусть $g \in \mathfrak{S}_\beta = \mathfrak{S}_{b_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{b_\ell}$ — перестановка циклового типа β, т.е. $g = g_1 \times \ldots \times g_\ell$, где g_i – это b_i-цикл в $\mathfrak{S}_{b_i}$.
- Тогда $\chi^{\lambda/\mu}(g) = \sum\limits_S \prod\limits_{i=1}^{\ell} \chi^{\lambda^{(i+1)}/\lambda^{(i)}}((b_i))$.
- Теперь всё следует из предыдущей теоремы: выживают только последовательности, в которых все $\lambda^{(j+1)}/\lambda^{(j)}$ – косые крюки, и результат равен $(-1)^{\sum_{j=0}^{\ell-1} \mathrm{ht}(\lambda^{(j+1)}/\lambda^{(j)})}$.

Пример

Пусть $\lambda = (5,4,3)$, $\mu = \emptyset$, $b = (1,2,3,6)$. Возможные последовательности (“таблицы косых крюков”):

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 4 \\ \cline{1-4} 2 & 4 & 4 \\ \cline{1-3} \end{array} \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\ \hline 3 & 3 & 4 & 4 \\ \cline{1-4} 3 & 4 & 4 \\ \cline{1-3} \end{array}$$

- В первом случае $\lambda^{(0)} = \emptyset$, $\lambda^{(1)} = (1)$, $\lambda^{(2)} = (1^3)$, $\lambda^{(3)} = (3,2,1)$, $\lambda^{(4)} = (5,4,3)$.
- Во втором случае $\lambda^{(0)} = \emptyset$, $\lambda^{(1)} = (1)$, $\lambda^{(2)} = (3)$, $\lambda^{(3)} = (3,2,1)$, $\lambda^{(4)} = (5,4,3)$.

Имеем $\mathrm{ht}(T_1) = 0+1+1+2 = 4$, $\mathrm{ht}(T_2) = 0+0+1+2 = 3$.

Итого $\chi^{\lambda/\mu}(\sigma) = (-1)^4 + (-1)^3 = 0$.