Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 10. Характеристическое отображение Фробениуса

Н. В. Цилевич

5 ноября 2021 г.

Пространство центральных функций на $\mathfrak{S}_n$

- Цикловый тип $\rho(w) \in \Pi_n$ перестановки $w \in \mathfrak{S}_n$: набор длин циклов в разложении на дизъюнктные циклы.
- Классы сопряжённости в $\mathfrak{S}_n$: $C_\lambda = \{w \in \mathfrak{S}_n \colon \rho(w) = \lambda\}$, $\lambda \in \Pi_n$.
- Было: $\#C_\lambda = \frac{n!}{z_\lambda}$.

Пространство центральных функций на $\mathfrak{S}_n$

- Цикловый тип $\rho(w) \in \Pi_n$ перестановки $w \in \mathfrak{S}_n$: набор длин циклов в разложении на дизъюнктные циклы.
- Классы сопряжённости в $\mathfrak{S}_n$: $C_\lambda = \{w \in \mathfrak{S}_n : \rho(w) = \lambda\}$, $\lambda \in \Pi_n$.
- Было: $\#C_\lambda = \frac{n!}{z_\lambda}$.
- $\mathrm{CF}^n := \{f : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{Q} : f(\sigma^{-1} g \sigma) = f(g)$ для любых $g, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ — пространство центральных функций на $\mathfrak{S}_n$.
- Характер любого представления $\mathfrak{S}_n$ лежит в CF^n; характеры неприводимых представлений образуют базис CF^n.
- Скалярное произведение в CF^n:
$$\boxed{\langle f, g\rangle := \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w) g(w) = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} f(\lambda) g(\lambda)}.$$

Характеристическое отображение Фробениуса

- Характеристическое отображение Фробениуса $\mathrm{ch} : \mathrm{CF}^n \to \Lambda^n$:

$$\boxed{\mathrm{ch}\, f = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w) p_{\rho(w)} = \sum_{\mu} \frac{1}{z_\mu} f(\mu) p_\mu}.$$

Характеристическое отображение Фробениуса

- Характеристическое отображение Фробениуса $\mathrm{ch} : \mathrm{CF}^n \to \Lambda^n$:
$$\boxed{\mathrm{ch}\, f = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w) p_{\rho(w)} = \sum_{\mu} \frac{1}{z_\mu} f(\mu) p_\mu}.$$
- Если f_μ — характеристическая функция C_μ, то $\mathrm{ch}\, f_\mu = z_\mu^{-1} p_\mu$.
- Вольность речи: π — представление $\mathfrak{S}_n \implies \mathrm{ch}\, \pi := \mathrm{ch}\, \chi_\pi$.

Характеристическое отображение Фробениуса

- Характеристическое отображение Фробениуса $\mathrm{ch} : \mathrm{CF}^n \to \Lambda^n$:
$$\boxed{\mathrm{ch}\, f = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} f(w) p_{\rho(w)} = \sum_{\mu} \frac{1}{z_\mu} f(\mu) p_\mu}.$$
- Если f_μ — характеристическая функция C_μ, то $\mathrm{ch}\, f_\mu = z_\mu^{-1} p_\mu$.
- Вольность речи: π — представление $\mathfrak{S}_n \implies \mathrm{ch}\,\pi := \mathrm{ch}\,\chi_\pi$.

Предложение

ch — *изометрия:* $\langle f, g \rangle_{\mathrm{CF}^n} = \langle \mathrm{ch}\, f, \mathrm{ch}\, g \rangle_{\Lambda^n}$.

Доказательство:
$$\langle \mathrm{ch}\, f, \mathrm{ch}\, g \rangle = \langle \sum_\lambda z_\lambda^{-1} f(\lambda) p_\mu, \sum_\mu z_\mu^{-1} g(\mu) p_\lambda \rangle = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} f(\lambda) g(\lambda) = \langle f, g \rangle.$$

- Рассмотрим $\widetilde{\mathrm{CF}^n} := \{f : \mathfrak{S}_n \to \Lambda \colon f(\sigma^{-1} g \sigma) = f(g)\ \forall g, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ и положим $\Psi(w) := p_{\rho(w)}$. Тогда $\Psi \in \widetilde{\mathrm{CF}^n}$ и $\boxed{\mathrm{ch}\, f = \langle f, \Psi \rangle}$.

- Рассмотрим $\widetilde{\mathrm{CF}^n} := \{f : \mathfrak{S}_n \to \Lambda \colon f(\sigma^{-1} g \sigma) = f(g)\ \forall g, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ и положим $\Psi(w) := p_{\rho(w)}$. Тогда $\Psi \in \widetilde{\mathrm{CF}^n}$ и $\boxed{\mathrm{ch}\, f = \langle f, \Psi \rangle}$.
- Рассмотрим естественное вложение $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_{m+n}$ (действие на дополнительных подмножествах).
- $v \in \mathfrak{S}_m$, $w \in \mathfrak{S}_n \mapsto v \times w \in \mathfrak{S}_{m+n}$, и корректно определен цикловый тип $\rho(v \times w) = \rho(v) \cup \rho(w)$.
- Тогда $\Psi(v \times w) = \Psi(v)\Psi(w)$.

- Рассмотрим $\widetilde{\mathrm{CF}^n} := \{f : \mathfrak{S}_n \to \Lambda \colon f(\sigma^{-1}g\sigma) = f(g)\ \forall g, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$ и положим $\Psi(w) := p_{\rho(w)}$. Тогда $\Psi \in \widetilde{\mathrm{CF}^n}$ и $\boxed{\operatorname{ch} f = \langle f, \Psi \rangle}$.
- Рассмотрим естественное вложение $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_{m+n}$ (действие на дополнительных подмножествах).
- $v \in \mathfrak{S}_m$, $w \in \mathfrak{S}_n \mapsto v \times w \in \mathfrak{S}_{m+n}$, и корректно определен цикловый тип $\rho(v \times w) = \rho(v) \cup \rho(w)$.
- Тогда $\Psi(v \times w) = \Psi(v)\Psi(w)$.

Хотим: определить на центральных функциях произведение, соответствующее произведению симметрических функций.

- Произведение индуцирования $\mathrm{CF}^m \times \mathrm{CF}^n \to \mathrm{CF}^{m+n}$. Достаточно задать на характерах. Если f — характер $\mathfrak{S}_m$ и g — характер $\mathfrak{S}_n$, то $\boxed{f \circ g := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} (f \times g)}$.

- Произведение индуцирования $\mathrm{CF}^m \times \mathrm{CF}^n \to \mathrm{CF}^{m+n}$. Достаточно задать на характерах. Если f — характер $\mathfrak{S}_m$ и g — характер $\mathfrak{S}_n$, то $\boxed{f \circ g := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} (f \times g)}$.
- Положим CF $:= \mathrm{CF}^0 \oplus \mathrm{CF}^1 \oplus \dots$.
- Скалярное произведение в CF: это разложение ортогонально.
- Произведение $\circ$ продолжаем на CF по билинейности.
- Итого, CF — коммутативная ассоциативная градуированная $\mathbb{Q}$-алгебра с единицей $1 \in \mathrm{CF}^0$.
- Распространим ch до линейного отображения $\mathrm{ch} : \mathrm{CF} \to \Lambda$ — характеристическое отображение Фробениуса.

Предложение

$\mathrm{ch} : \mathrm{CF} \to \Lambda = \Lambda_{\mathbb{Q}}$ — *изоморфизм колец.*

Предложение

$\mathrm{ch} : \mathrm{CF} \to \Lambda = \Lambda_{\mathbb{Q}}$ — *изоморфизм колец.*

Доказательство.

- Гомоморфность:
$$\mathrm{ch}(f \circ g) = \mathrm{ch}(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}}(f \times g)) = \langle \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}}(f \times g), \Psi \rangle =$$
$$= \langle f \times g, \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{m+n}} \Psi \rangle_{\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n} = \frac{1}{m!n!} \sum_{u \in \mathfrak{S}_m} \sum_{v \in \mathfrak{S}_n} f(u) g(v) \Psi(u \times v) =$$
$$= \frac{1}{m!n!} \sum_{u \in \mathfrak{S}_m} \sum_{v \in \mathfrak{S}_n} f(u) g(v) \Psi(u) \Psi(v) = \langle f, \Psi \rangle_{\mathfrak{S}_m} \langle g, \Psi \rangle_{\mathfrak{S}_n} =$$
$$= (\mathrm{ch}\, f)(\mathrm{ch}\, g).$$
- Биективность: $\mathrm{ch}\, f_\mu = z_\mu^{-1} p_\mu$, а $\{f_\mu\}$ и $\{p_\lambda\}$ — базисы.

Характеры модулей Юнга

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ — разложение $n \rightsquigarrow$ подгруппа Юнга $\mathfrak{S}_\alpha := \mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{\alpha_\ell} \subset \mathfrak{S}_n$.
- α и β отличаются перестановкой координат $\implies$ $\mathfrak{S}_\alpha$ и $\mathfrak{S}_\beta$ сопряжены в $\mathfrak{S}_n$ $\implies$ $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}$ и $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\beta}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\beta}$ эквивалентны.

Характеры модулей Юнга

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ — разложение n $\rightsquigarrow$ подгруппа Юнга $\mathfrak{S}_\alpha := \mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{\alpha_\ell} \subset \mathfrak{S}_n$.
- α и β отличаются перестановкой координат $\implies$ $\mathfrak{S}_\alpha$ и $\mathfrak{S}_\beta$ сопряжены в $\mathfrak{S}_n$ $\implies$ $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}$ и $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\beta}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\beta}$ эквивалентны.
- $\eta^\alpha :=$ характер $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}$.
- Замечание: $\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n} = \eta^{(n)}$.

Характеры модулей Юнга

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ — разложение $n \rightsquigarrow$ подгруппа Юнга $\mathfrak{S}_\alpha := \mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{\alpha_\ell} \subset \mathfrak{S}_n$.
- α и β отличаются перестановкой координат $\implies$ $\mathfrak{S}_\alpha$ и $\mathfrak{S}_\beta$ сопряжены в $\mathfrak{S}_n$ $\implies$ $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}$ и $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\beta}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\beta}$ эквивалентны.
- $\eta^\alpha :=$ характер $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}$.
- Замечание: $\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n} = \eta^{(n)}$.

Предложение

(a) $\boxed{\mathrm{ch}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n} = h_n}$; (b) $\boxed{\mathrm{ch}\,\eta^\alpha = h_\alpha}$.

Характеры модулей Юнга

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ — разложение $n \rightsquigarrow$ подгруппа Юнга $\mathfrak{S}_\alpha := \mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{\alpha_\ell} \subset \mathfrak{S}_n$.
- α и β отличаются перестановкой координат $\implies$ $\mathfrak{S}_\alpha$ и $\mathfrak{S}_\beta$ сопряжены в $\mathfrak{S}_n \implies \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}$ и $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\beta}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\beta}$ эквивалентны.
- $\eta^\alpha :=$ характер $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}$.
- Замечание: $\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n} = \eta^{(n)}$.

Предложение

(a) $\boxed{\mathrm{ch}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n} = h_n}$; (b) $\boxed{\mathrm{ch}\,\eta^\alpha = h_\alpha}$.

Доказательство.

- (a) $\mathrm{ch}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n} = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda = h_n$.

Характеры модулей Юнга

- $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ — разложение $n \rightsquigarrow$ подгруппа Юнга $\mathfrak{S}_\alpha := \mathfrak{S}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{\alpha_\ell} \subset \mathfrak{S}_n$.
- α и β отличаются перестановкой координат $\implies$ $\mathfrak{S}_\alpha$ и $\mathfrak{S}_\beta$ сопряжены в $\mathfrak{S}_n$ $\implies$ $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}$ и $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\beta}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\beta}$ эквивалентны.
- $\eta^\alpha :=$ характер $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}$.
- Замечание: $\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n} = \eta^{(n)}$.

Предложение

(a) $\boxed{\mathrm{ch}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n} = h_n}$; (b) $\boxed{\mathrm{ch}\,\eta^\alpha = h_\alpha}$.

Доказательство.

- (a) $\mathrm{ch}\,\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_n} = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda = h_n$.
- (b) $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha} = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} (\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_{\alpha_1}} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_{\alpha_\ell}}) \implies$ $\eta^\alpha = \eta^{(\alpha_1)} \circ \ldots \circ \eta^{(\alpha_\ell)}$, а ch — гомоморфизм колец.

Кольцо виртуальных характеров

- $R^n :=$ $\mathbb{Z}$-модуль, порождённый неприводимыми характерами $\mathfrak{S}_n$ $=$ множество виртуальных характеров $\mathfrak{S}_n$.
- Это решётка (дискретная подгруппа макс. ранга) в CF^n.

Кольцо виртуальных характеров

- $R^n := \mathbb{Z}$-модуль, порождённый неприводимыми характерами $\mathfrak{S}_n$ = множество виртуальных характеров $\mathfrak{S}_n$.
- Это решётка (дискретная подгруппа макс. ранга) в CF^n.
- Неприводимые характеры образуют ортонормированный базис в R^n; это единственный ортонормированный базис с точностью до знака и порядка элементов (матрица перехода целочисленная и ортогональная $\implies$ перестановочная со знаками).

Кольцо виртуальных характеров

- $R^n := \mathbb{Z}$-модуль, порождённый неприводимыми характерами $\mathfrak{S}_n$ = множество виртуальных характеров $\mathfrak{S}_n$.
- Это решётка (дискретная подгруппа макс. ранга) в CF^n.
- Неприводимые характеры образуют ортонормированный базис в R^n; это единственный ортонормированный базис с точностью до знака и порядка элементов (матрица перехода целочисленная и ортогональная $\implies$ перестановочная со знаками).
- $R := \bigoplus_{n \geq 0} R^n$ — коммутативное ассоциативное градуированное кольцо с единицей, снабжённое скалярным произведением.

Теорема

$\mathrm{ch} : R \to \Lambda_{\mathbb{Z}}$ — *изоморфизм колец.*

Теорема

ch : $R \to \Lambda_{\mathbb{Z}}$ — *изоморфизм колец.*

Доказательство.

- Надо: $\mathrm{ch}(R) = \Lambda_{\mathbb{Z}}$.
- Знаем: $\mathrm{ch}(\eta^\alpha) = h_\alpha \in \Lambda_{\mathbb{Z}} \implies$ достаточно: любой неприводимый характер есть целочисленная линейная комбинация η^α.

Теорема

ch : $R \to \Lambda_{\mathbb{Z}}$ — *изоморфизм колец.*

Доказательство.

- Надо: $\mathrm{ch}(R) = \Lambda_{\mathbb{Z}}$.
- Знаем: $\mathrm{ch}(\eta^\alpha) = h_\alpha \in \Lambda_{\mathbb{Z}} \implies$ достаточно: любой неприводимый характер есть целочисленная линейная комбинация η^α.
- $\psi^\lambda := \det(\eta^{\lambda_i - i + j}) \in R^n \implies \mathrm{ch}\,\psi^\lambda = s_\lambda \in \Lambda_{\mathbb{Z}}$.

Теорема

$\mathrm{ch} : R \to \Lambda_{\mathbb{Z}}$ — *изоморфизм колец.*

Доказательство.

- Надо: $\mathrm{ch}(R) = \Lambda_{\mathbb{Z}}$.
- Знаем: $\mathrm{ch}(\eta^\alpha) = h_\alpha \in \Lambda_{\mathbb{Z}} \implies$ достаточно: любой неприводимый характер есть целочисленная линейная комбинация η^α.
- $\psi^\lambda := \det(\eta^{\lambda_i - i + j}) \in R^n \implies \mathrm{ch}\,\psi^\lambda = s_\lambda \in \Lambda_{\mathbb{Z}}$.
- ch — изометрия $\implies \langle \psi^\lambda, \psi^\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \implies \psi^\lambda$ — неприводимые характеры $\mathfrak{S}_n$ с точностью до знака.
- Таким образом, $\{\psi^\lambda\}_{\lambda \vdash n}$ — базис в R^n, $\mathrm{ch}\,\psi^\lambda \in \Lambda_{\mathbb{Z}} \implies$ QED.

Вспомним правило Мурнагана–Накаямы:
$s_\lambda = \sum_\nu \frac{1}{z_\nu} \chi^\lambda(\nu) p_\nu$, где $\chi^\lambda(\mu) := \sum_{T \in \mathrm{BST}(\lambda,\mu)} (-1)^{\mathrm{ht}(T)}$.

Вспомним <u>правило Мурнагана–Накаямы</u>:
$s_\lambda = \sum_\nu \frac{1}{z_\nu}\chi^\lambda(\nu)p_\nu$, где $\chi^\lambda(\mu) := \sum_{T\in \mathsf{BST}(\lambda,\mu)} (-1)^{\mathrm{ht}(T)}$.

Теорема

Функции $\chi^\lambda(\mu)$ из правила Мурнагана–Накаямы — неприводимые характеры $\mathfrak{S}_n$.

Вспомним правило Мурнагана–Накаямы:
$s_\lambda = \sum_\nu \frac{1}{z_\nu} \chi^\lambda(\nu) p_\nu$, где $\chi^\lambda(\mu) := \sum_{T \in \mathrm{BST}(\lambda,\mu)} (-1)^{\mathrm{ht}(T)}$.

Теорема

Функции $\chi^\lambda(\mu)$ из правила Мурнагана–Накаямы — неприводимые характеры $\mathfrak{S}_n$.

Доказательство.

- По правилу Мурнагана–Накаямы $\mathrm{ch}(\chi^\lambda) = \sum_\mu z_\mu^{-1} \chi^\lambda(\mu) p_\mu = s_\lambda$ $\implies \chi^\lambda = \psi^\lambda \implies$ либо χ^λ, либо $-\chi^\lambda$ — неприводимый характер.
- $\chi^\lambda(1^n) = \dim \lambda > 0 \implies$ именно χ^λ.

Симметрические функции и представления

- $\boxed{\mathrm{ch}\,\chi^\lambda = s_\lambda}$.

Симметрические функции и представления

- $\boxed{\operatorname{ch}\chi^\lambda = s_\lambda}$.
- Матрица перехода $M(p,s)$ = таблица характеров $\mathfrak{S}_n$:

$$\boxed{p_\rho = \sum_\lambda \chi^\rho(\lambda) s_\lambda}.$$

- $\boxed{\chi^\lambda(\mu) = \langle s_\lambda, p_\mu \rangle}$.

Симметрические функции и представления

- $\boxed{\operatorname{ch}\chi^\lambda = s_\lambda}$.
- Матрица перехода $M(p,s) =$ таблица характеров $\mathfrak{S}_n$:
  $$\boxed{p_\rho = \sum_\lambda \chi^\rho(\lambda) s_\lambda}.$$
- $\boxed{\chi^\lambda(\mu) = \langle s_\lambda, p_\mu \rangle}$.
- $\dim\lambda = \chi^\lambda(1^n) = \dim \pi_\lambda$.
- Размерность (степень) произвольного характера χ равна $\boxed{\dim\chi = \langle \operatorname{ch}\chi, p_1^n \rangle = \langle \operatorname{ch}\chi, s_{(1^n)} \rangle}$.

Симметрические функции и представления

- $\boxed{\mathrm{ch}\,\chi^\lambda = s_\lambda}$.
- Матрица перехода $M(p,s)$ = таблица характеров $\mathfrak{S}_n$:
  $$\boxed{p_\rho = \sum_\lambda \chi^\rho(\lambda) s_\lambda}.$$
- $\boxed{\chi^\lambda(\mu) = \langle s_\lambda, p_\mu \rangle}$.
- $\dim\lambda = \chi^\lambda(1^n) = \dim\pi_\lambda$.
- Размерность (степень) произвольного характера χ равна
  $$\boxed{\dim\chi = \langle \mathrm{ch}\,\chi, p_1^n \rangle = \langle \mathrm{ch}\,\chi, s_{(1^n)} \rangle}.$$
- $\sum\limits_{\lambda\vdash n} (\dim\lambda)^2 = n!$ — формула Бернсайда.
- Соотношения ортогональности выше = соотношения ортогональности для характеров.

Симметрические функции и представления

Следствие (правило Мурнагана–Накаямы)

$$\boxed{\chi^\lambda(\mu) = \sum_{T \in \mathsf{BST}(\lambda,\mu)} (-1)^{\mathrm{ht}(T)}}.$$

Следствие (правило Мурнагана–Накаямы)

$$\boxed{\chi^{\lambda}(\mu) = \sum_{T \in \mathsf{BST}(\lambda,\mu)} (-1)^{\mathrm{ht}(T)}}.$$

Следствие (формула Фробениуса для характеров)

$$\boxed{\chi^{\lambda}(\alpha) = [x^{\lambda+\delta}]\,(a_{\delta} p_{\alpha}(x)) = [x^{\lambda}] \prod_{i<j} (1 - \frac{x_i}{x_j}) p_{\alpha}},$$

где число переменных $N \geq \ell(\lambda)$.

Симметрические функции и представления

Следствие (правило Мурнагана–Накаямы)

$$\boxed{\chi^\lambda(\mu) = \sum_{T \in \mathsf{BST}(\lambda,\mu)} (-1)^{\mathrm{ht}(T)}}.$$

Следствие (формула Фробениуса для характеров)

$$\boxed{\chi^\lambda(\alpha) = [x^{\lambda+\delta}]\,(a_\delta p_\alpha(x)) = [x^\lambda] \prod_{i<j} (1 - \frac{x_i}{x_j}) p_\alpha},$$

где число переменных $N \geq \ell(\lambda)$.

Следствие

Коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона $c^\lambda_{\mu\nu} \geq 0$.

Доказательство: $c^\lambda_{\mu\nu} = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu \rangle = \langle \chi^\lambda, \chi^\mu \circ \chi^\nu \rangle \geq 0$, так как $\chi^\mu \circ \chi^\nu$ — характер.

Правило Юнга

Задача разложения произвольного представления $\mathfrak{S}_n$ на неприводимые сводится к задаче разложения соответствующей характеристики по базису функций Шура!

Правило Юнга

Задача разложения произвольного представления $\mathfrak{S}_n$ на неприводимые сводится к задаче разложения соответствующей характеристики по базису функций Шура!

Предложение (правило Юнга)

α — разложение n и $\lambda \vdash n$ $\implies$ $\boxed{\langle \eta^\alpha, \chi^\lambda \rangle = K_{\lambda\alpha}}$, *т.е.* $\boxed{\langle \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}, \pi_\lambda \rangle = K_{\lambda\alpha}}$.

Доказательство: $\operatorname{ch} \eta^\alpha = h_\alpha \implies \langle \eta^\alpha, \chi^\lambda \rangle = \langle h_\alpha, s_\lambda \rangle = K_{\lambda\alpha}$.

Примеры

- $\operatorname{ch} \operatorname{id}_n = h_n$, $\operatorname{ch} \eta^\alpha = h_\alpha$;
- $\operatorname{ch} \pi_\lambda = s_\lambda$;

Примеры

- $\operatorname{ch} \operatorname{id}_n = h_n$, $\operatorname{ch} \eta^\alpha = h_\alpha$;
- $\operatorname{ch} \pi_\lambda = s_\lambda$;
- ($\bigstar$) $\operatorname{ch} \operatorname{sgn}_n = e_n$;
- ($\bigstar$) $\operatorname{ch}(\operatorname{sgn}_n \otimes \pi) = \omega(\operatorname{ch} \pi)$;

Примеры

- $\operatorname{ch} \mathrm{id}_n = h_n$, $\operatorname{ch} \eta^\alpha = h_\alpha$;
- $\operatorname{ch} \pi_\lambda = s_\lambda$;
- ($\bigstar$) $\operatorname{ch} \mathrm{sgn}_n = e_n$;
- ($\bigstar$) $\operatorname{ch}(\mathrm{sgn}_n \otimes \pi) = \omega(\operatorname{ch} \pi)$;
- ($\bigstar$) $\operatorname{ch} \mathrm{Reg}_n = h_1^n$ (соответственно, $h_1^n = \sum\limits_{\lambda \vdash n} \dim \lambda \cdot s_\lambda \iff$ каждое неприводимое входит в регулярное с кратностью = размерности).