Теория представлений симметрических групп

Лекция 10. Модули Юнга. Соответствие Фробениуса–Юнга

Н. В. Цилевич

5 ноября 2021 г.

Разложения и подгруппы Юнга

- Разложение $[n]$ типа $\alpha = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Comp}(n)$ – упорядоченное разбиение $[n] = \sqcup A_j$, где $|A_j| = a_j$.
- **Пример:** $(\{3\}, \{1,4\}, \{2\})$ – разложение $[4]$ типа $(1,2,1)$.
- $\Omega_\alpha :=$ множество всех разложений типа α.
  На нём транзитивно действует $\mathfrak{S}_n$.

Разложения и подгруппы Юнга

- Разложение $[n]$ типа $\alpha = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Comp}(n)$ – упорядоченное разбиение $[n] = \sqcup A_j$, где $|A_j| = a_j$.
- **Пример:** $(\{3\}, \{1, 4\}, \{2\})$ – разложение $[4]$ типа $(1, 2, 1)$.
- $\Omega_\alpha :=$ множество всех разложений типа α.
  На нём транзитивно действует $\mathfrak{S}_n$.
- $A \in \Omega_\alpha \rightsquigarrow \mathrm{Stab}(A) = \mathfrak{S}_{a_1} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{a_k} = \mathfrak{S}_\alpha$ – подгруппа Юнга типа α.
  Таким образом, $\Omega_\alpha \simeq \mathfrak{S}_n / \mathfrak{S}_\alpha$.
- α и β получаются друг из друга перестановкой $\implies \Omega_\alpha \simeq \Omega_\beta$.

Модули Юнга

- Модуль Юнга типа α = индуцированное представление

$$M_\alpha := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_\alpha = L(\Omega_\alpha), \qquad \text{где } \mathrm{id}_\alpha = \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}.$$

- Нас интересует разложение M_λ на неприводимые:

$$M_\lambda = \sum_\mu c_{\lambda\mu}\pi_\mu,$$

где $c_{\lambda\mu} := \langle \pi_\mu, M_\lambda \rangle$.

Порядки на разбиениях

- Порядок по доминированию (частичный):
  $\lambda \trianglelefteq \mu \iff \lambda_1 + \ldots + \lambda_j \leqslant \mu_1 + \ldots + \mu_j$ для всех j.
- **Пример:** $(3,3) \trianglelefteq (4,2)$. Но $(3,3)$ и $(4,1^2)$ не сравнимы.
- ($\star$) $\lambda \trianglelefteq \mu \iff \mu' \trianglelefteq \lambda'$.

Порядки на разбиениях

- Порядок по доминированию (частичный):
  $\lambda \trianglelefteq \mu \iff \lambda_1 + \ldots + \lambda_j \leqslant \mu_1 + \ldots + \mu_j$ для всех j.
- **Пример:** $(3,3) \trianglelefteq (4,2)$. Но $(3,3)$ и $(4,1^2)$ не сравнимы.
- $(\bigstar)$ $\lambda \trianglelefteq \mu \iff \mu' \trianglelefteq \lambda'$.
- Обратный лексикографический порядок (полный):
  $\lambda \overset{R}{<} \mu \iff \exists j\colon \lambda_i = \mu_i$ при $i = 1, \ldots, j-1$ и $\lambda_j < \mu_j$.
- $(\bigstar)$ Порядки согласованы: $\lambda \trianglelefteq \mu \implies \lambda \overset{R}{\leqslant} \mu$.

Порядки на разбиениях

- Порядок по доминированию (частичный):
  $\lambda \trianglelefteq \mu \iff \lambda_1 + \ldots + \lambda_j \leqslant \mu_1 + \ldots + \mu_j$ для всех j.
- **Пример:** $(3,3) \trianglelefteq (4,2)$. Но $(3,3)$ и $(4,1^2)$ не сравнимы.
- ($\star$) $\lambda \trianglelefteq \mu \iff \mu' \trianglelefteq \lambda'$.
- Обратный лексикографический порядок (полный):
  $\lambda \overset{R}{<} \mu \iff \exists j$: $\lambda_i = \mu_i$ при $i = 1, \ldots, j-1$ и $\lambda_j < \mu_j$.
- ($\star$) Порядки согласованы: $\lambda \trianglelefteq \mu \implies \lambda \overset{R}{\leqslant} \mu$.
- Матрица $M = (M(\lambda, \mu))_{\lambda,\mu \vdash n}$ – строго верхняя унитреугольная
  $\iff M(\lambda, \mu) = 0$ при $\lambda \not\trianglelefteq \mu$ и $M(\lambda, \lambda) = 1$.

  Тогда она строго верхняя унитреугольная относительно $\overset{R}{<}$.
- Строго верхняя унитреугольная матрица M обратима. Если M целочисленная, то M^{-1} тоже целочисленная строго верхняя унитреугольная.

Полустандартные таблицы Юнга

Пусть $\lambda \vdash n$, $\alpha = (a_1, \dots, a_k) \in \mathrm{Comp}(n)$.

- Полустандартная таблица Юнга формы $\lambda \in \Pi_n$ и типа α – заполнение λ числами $1, \dots, k$, такое, что
  - строгое возрастание по столбцам, нестрогое по строкам;
  - число i встречается a_i раз.
- **Пример.** Полустандартная таблица формы $(6, 4, 2, 2, 1)$ и типа $(4, 3, 3, 1, 2, 2)$:

1	1	1	1	2	2
2	3	3	4		
3	5				
5	6				
6					

- Клетки с i – горизонтальная полоса!

Числа Костки

- SSYT(λ, α) – множество полустандартных таблиц формы λ типа α.
- $K_{\lambda\alpha} := \#\,\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha)$ – число Костки.

Числа Костки

- $\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha)$ – множество полустандартных таблиц формы λ типа α.
- $K_{\lambda\alpha} := \#\,\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha)$ – число Костки.

Лемма (унитреугольность чисел Костки)

- $K_{\lambda\alpha} \neq 0 \implies \lambda \trianglerighteq \alpha$.
- $K_{\lambda\lambda} = 1$.

Доказательство.

- $K_{\lambda\alpha} \neq 0 \implies \exists T \in \mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha)$.
- k не может быть ниже k-й строки $\implies$ все элементы $1, \ldots, k$ в первых k строках $\implies a_1 + \ldots + a_k \leq \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$.
- Если $\alpha = \lambda$, то $T_{ij} = i$ для всех клеток $\implies K_{\lambda\lambda} = 1$.

Числа Костки

- SSYT(λ, α) – множество полустандартных таблиц формы λ типа α.
- $K_{\lambda\alpha} := \#\,\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha)$ – число Костки.

Лемма (унитреугольность чисел Костки)

- $K_{\lambda\alpha} \neq 0 \implies \lambda \trianglerighteq \alpha$.
- $K_{\lambda\lambda} = 1$.

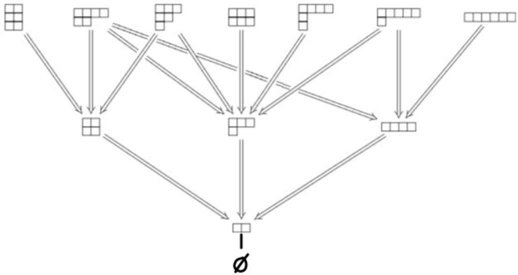
Замечание. Таким образом, если $\nu \trianglerighteq (a_1, \ldots, a_i)$ и μ/ν – горизонтальная k-полоса, то $\mu \trianglerighteq (a_1, \ldots, a_i, k)$.

Редуцированный граф Юнга

- $\alpha = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Comp}(n) \rightsquigarrow$ редуцированный граф Юнга $\mathbb{Y}_\alpha$:
  - множество Γ_i вершин i-го этажа = множество диаграмм $\nu \vdash a_1 + \ldots + a_i$, таких, что $\nu \trianglerighteq (a_1, \ldots, a_i)$;
  - вершины $\nu \in \Gamma_i$ и $\mu \in \Gamma_{i+1}$ соединены ребром $\iff$ $\iff$ μ/ν – горизонтальная полоса (очевидно, размера a_{i+1}).

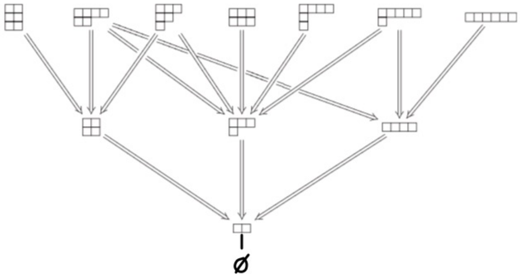
Редуцированный граф Юнга

- $\alpha = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Comp}(n) \rightsquigarrow$ редуцированный граф Юнга $\mathbb{Y}_\alpha$:
  - множество Γ_i вершин i-го этажа = множество диаграмм $\nu \vdash a_1 + \ldots + a_i$, таких, что $\nu \trianglerighteq (a_1, \ldots, a_i)$;
  - вершины $\nu \in \Gamma_i$ и $\mu \in \Gamma_{i+1}$ соединены ребром $\iff$ $\iff$ μ/ν – горизонтальная полоса (очевидно, размера a_{i+1}).
- **Пример:** $\mathbb{Y}_{(2,2,2)}$



Редуцированный граф Юнга

- $\alpha = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Comp}(n) \rightsquigarrow$ редуцированный граф Юнга $\mathbb{Y}_\alpha$:
  - множество Γ_i вершин i-го этажа $=$ множество диаграмм $\nu \vdash a_1 + \ldots + a_i$, таких, что $\nu \trianglerighteq (a_1, \ldots, a_i)$;
  - вершины $\nu \in \Gamma_i$ и $\mu \in \Gamma_{i+1}$ соединены ребром $\iff$ $\iff$ μ/ν – горизонтальная полоса (очевидно, размера a_{i+1}).
- **Пример:** $\mathbb{Y}_{(2,2,2)}$



- Пути в $\mathbb{Y}_\alpha$ от $\emptyset$ до вершины $\mu \leftrightarrow \mathrm{SSYT}(\mu, \alpha)$.

Чего хотим-то?

- Вспомним, чего мы вообще хотим: разложить представление $M_\alpha := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha}$ на неприводимые.
- $\langle \rho, \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha} \rangle \neq 0 \iff \langle \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \rho, \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha} \rangle \neq 0.$
- Итого: $\rho \in \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\alpha} \iff \rho$ содержит нетривиальный $\mathfrak{S}_\alpha$-инвариантный вектор.

Таким образом, можно (временно) ограничиться изучением только представлений $\mathfrak{S}_n$, содержащих нетривиальный $\mathfrak{S}_\alpha$-инвариантный вектор.

«Относительные» диаграммы Браттели

Фиксируем пару конечных групп $K \subset G$. Нас интересуют представления G и её подгрупп, содержащие K-инвариантные векторы.

Пусть $K \subset H \subset G$ и $\theta \in \hat{H}$.

- θ содержит K-инвариантный вектор $v \neq 0 \iff$
  $\iff \langle \mathrm{Res}_K^H \theta, \mathrm{id}_K \rangle \neq 0 \iff \langle \theta, \mathrm{Ind}_K^H \mathrm{id}_K \rangle \neq 0.$
- $\widehat{H}^K$ = множество таких представлений H.

«Относительные» диаграммы Браттели

Фиксируем пару конечных групп $K \subset G$. Нас интересуют представления G и её подгрупп, содержащие K-инвариантные векторы.

Пусть $K \subset H \subset G$ и $\theta \in \hat{H}$.

- θ содержит K-инвариантный вектор $v \neq 0 \iff$
  $\iff \langle \mathrm{Res}_K^H \theta, \mathrm{id}_K \rangle \neq 0 \iff \langle \theta, \mathrm{Ind}_K^H \mathrm{id}_K \rangle \neq 0.$
- $\widehat{H}^K$ = множество таких представлений H.

Пусть есть цепочка $G = H_m \supset H_{m-1} \supset \ldots \supset H_2 \supset H_1 = K$.

- Диаграмма Браттели этой цепочки для пары (G, K):
  - множество вершин j-го этажа $= \widehat{H}_j^K$.
  - $\theta \in \widehat{H}_j^K$ и $\eta \in \widehat{H}_{j+1}^K$ соединены ребром $\iff \langle \theta, \mathrm{Res}_{H_j}^{H_{j+1}} \eta \rangle = 1$.

Простое ветвление

- H – подгруппа без кратностей для пары (G, K)
  $\iff \langle \theta, \mathrm{Res}^G_H \rho \rangle \leqslant 1$ для любого $\theta \in \widehat{H}^K$ и $\rho \in \widehat{G}^K$
  $\iff \langle \mathrm{Ind}^G_H \theta, \rho \rangle \leqslant 1$ для любого $\theta \in \widehat{H}^K$ и $\rho \in \widehat{G}^K$.

Простое ветвление

- H – подгруппа без кратностей для пары (G, K)
  $\iff \langle \theta, \mathrm{Res}^G_H \rho \rangle \leqslant 1$ для любого $\theta \in \widehat{H}^K$ и $\rho \in \widehat{G}^K$
  $\iff \langle \mathrm{Ind}^G_H \theta, \rho \rangle \leqslant 1$ для любого $\theta \in \widehat{H}^K$ и $\rho \in \widehat{G}^K$.
- Цепочка $G = H_m \supset H_{m-1} \supset \ldots \supset H_2 \supset H_1 = K$ имеет простое ветвление для пары $(G, K) \iff H_j$ – подгруппа без кратностей для пары (H_{j+1}, K) при $j = 1, \ldots, m-1$.

Простое ветвление

- H – подгруппа без кратностей для пары (G,K) $\iff \langle \theta, \mathrm{Res}^G_H \rho\rangle \leqslant 1$ для любого $\theta \in \widehat{H}^K$ и $\rho \in \widehat{G}^K$ $\iff \langle \mathrm{Ind}^G_H \theta, \rho\rangle \leqslant 1$ для любого $\theta \in \widehat{H}^K$ и $\rho \in \widehat{G}^K$.
- Цепочка $G = H_m \supset H_{m-1} \supset \ldots \supset H_2 \supset H_1 = K$ имеет простое ветвление для пары (G,K) $\iff$ H_j – подгруппа без кратностей для пары (H_{j+1},K) при $j = 1,\ldots,m-1$.
- Если имеется цепочка с простым ветвлением для (G,K), то можно повторить конструкцию базиса Гельфанда–Цетлина и получить ортогональный базис в пространстве представления $\mathrm{Ind}^G_K \mathrm{id}_K$, т.е. в $L(G/K)$.

Пусть $\alpha = (a_1, \dots, a_k) \in \mathrm{Comp}(n) \rightsquigarrow$ положим

- $G = \mathfrak{S}_n$, $K = \mathfrak{S}_\alpha$,
- $H_i = \mathfrak{S}_{a_1+\ldots+a_i} \times \mathfrak{S}_{a_{i+1}} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{a_k}$.

Получаем индуктивную цепочку подгрупп

$$G = H_k \supset H_{k-1} \supset \ldots \supset H_2 \supset H_1 = K.$$

Пусть $\alpha = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Comp}(n) \rightsquigarrow$ положим

- $G = \mathfrak{S}_n$, $K = \mathfrak{S}_\alpha$,
- $H_i = \mathfrak{S}_{a_1+\ldots+a_i} \times \mathfrak{S}_{a_{i+1}} \times \ldots \times \mathfrak{S}_{a_k}$.

Получаем индуктивную цепочку подгрупп

$$G = H_k \supset H_{k-1} \supset \ldots \supset H_2 \supset H_1 = K.$$

Теорема

(1) *Эта цепочка имеет простое ветвление для* $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_\alpha)$.

(2) *Соответствующая диаграмма Браттели совпадает с редуцированным графом Юнга* $\mathbb{Y}_\alpha$.

Доказательство теоремы

- Было: $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n-k \implies$
$$\langle \pi_\mu \otimes \pi_{(k)}, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-k}\times\mathfrak{S}_k} \pi_\lambda \rangle = \begin{cases} 1, & \lambda/\mu \in \mathrm{HS}(k), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство теоремы

- Было: $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n-k \implies$
$$\langle \pi_\mu \otimes \pi_{(k)}, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-k}\times\mathfrak{S}_k} \pi_\lambda \rangle = \begin{cases} 1, & \lambda/\mu \in \mathrm{HS}(k), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$
- Тогда $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{a_1+\ldots+a_{k-1}}\times\mathfrak{S}_{a_k}} \pi_\lambda = \left(\bigoplus_{\lambda/\nu \in \mathrm{HS}(a_k)} \pi_\nu \otimes \pi_{(a_k)} \right) \oplus W$,
где W состоит из представлений вида $\pi_\nu \otimes \pi_\theta$, где $\theta \vdash a_k$, $\theta \neq (a_k)$, т.е. не содержащих нетривиальных $\mathfrak{S}_\alpha$-инвариантных векторов $\implies$ простое ветвление для $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_\alpha)$.

Доказательство теоремы

- Было: $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n-k \implies$
$$\langle \pi_\mu \otimes \pi_{(k)}, \mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-k}\times\mathfrak{S}_k} \pi_\lambda \rangle = \begin{cases} 1, & \lambda/\mu \in \mathrm{HS}(k), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$
- Тогда $\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{a_1+\ldots+a_{k-1}}\times\mathfrak{S}_{a_k}} \pi_\lambda = \left(\bigoplus_{\lambda/\nu \in \mathrm{HS}(a_k)} \pi_\nu \otimes \pi_{(a_k)} \right) \oplus W$, где W состоит из представлений вида $\pi_\nu \otimes \pi_\theta$, где $\theta \vdash a_k$, $\theta \neq (a_k)$, т.е. не содержащих нетривиальных $\mathfrak{S}_\alpha$-инвариантных векторов $\implies$ простое ветвление для $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_\alpha)$.
- Итерируем: $\pi_\lambda \in \mathfrak{S}_n^{\mathfrak{S}_a} \iff$ существует цепочка
$$(a_1) = \nu^{(1)} \subset \nu^{(2)} \subset \ldots \subset \nu^{(k)} = \lambda,$$
где $\nu^{(j)} \vdash a_1 + \ldots + a_j$ и $\nu^{(j+1)}/\nu^{(j)} \in \mathrm{HS}(a_{j+1}) \implies$ QED.

Правило Юнга

Теорема (правило Юнга)

Кратность неприводимого представления π_λ *в модуле Юнга* M_α *равна числу Костки* $K_{\lambda\alpha}$*:*

$$\boxed{\langle \pi_\lambda, M_\alpha \rangle = K_{\lambda\alpha}}.$$

Таким образом, $M_\alpha = \bigoplus_{\lambda \trianglerighteq \alpha} K_{\lambda\alpha}\pi_\lambda$*.*

Правило Юнга

Теорема (правило Юнга)

Кратность неприводимого представления π_λ в модуле Юнга M_α равна числу Костки $K_{\lambda\alpha}$:

$$\boxed{\langle \pi_\lambda, M_\alpha \rangle = K_{\lambda\alpha}}.$$

Таким образом, $M_\alpha = \bigoplus\limits_{\lambda \trianglerighteq \alpha} K_{\lambda\alpha}\pi_\lambda$.

Доказательство:

$\langle \pi_\lambda, \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_\alpha \rangle = \langle \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \pi_\lambda, \mathrm{id}_\alpha \rangle =$ число путей в $\mathbb{Y}_\alpha$ от $\emptyset$ до λ
$= \#\,\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha) = K_{\lambda\alpha}$.

Правило Юнга

Теорема (правило Юнга)

Кратность неприводимого представления π_λ *в модуле Юнга* M_α *равна числу Костки* $K_{\lambda\alpha}$*:*

$$\boxed{\langle \pi_\lambda, M_\alpha \rangle = K_{\lambda\alpha}}.$$

Таким образом, $M_\alpha = \bigoplus\limits_{\lambda \trianglerighteq \alpha} K_{\lambda\alpha} \pi_\lambda$.

Доказательство:

$\langle \pi_\lambda, \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_\alpha \rangle = \langle \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \pi_\lambda, \mathrm{id}_\alpha \rangle =$ число путей в $\mathbb{Y}_\alpha$ от $\emptyset$ до λ
$= \#\,\mathrm{SSYT}(\lambda, \alpha) = K_{\lambda\alpha}$.

Следствие

α *и* β *отличаются перестановкой элементов* $\implies K_{\lambda\alpha} = K_{\lambda\beta}$.

Т.о. матрица чисел Костки $(K_{\lambda\mu})$ – строго верхняя унитреугольная.

Что мы выяснили про разложение модуля Юнга на неприводимые?

- π_μ входит в $M_\lambda \implies \mu \trianglerighteq \lambda$,
- кратность π_λ в M_λ равна 1.

Модули $\widetilde{M}_\alpha$

Что мы выяснили про разложение модуля Юнга на неприводимые?

- π_μ входит в $M_\lambda \implies \mu \trianglerighteq \lambda$,
- кратность π_λ в M_λ равна 1.

Теперь рассмотрим представление $\widetilde{M}_\alpha := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\alpha$, где $\varepsilon_\alpha := \varepsilon_{\mathfrak{S}_\alpha}$ – знакопеременное представление $\mathfrak{S}_\alpha$. Как раскладывается на неприводимые оно?

Модули $\widetilde{M}_\alpha$

Что мы выяснили про разложение модуля Юнга на неприводимые?

- π_μ входит в $M_\lambda \implies \mu \trianglerighteq \lambda$,
- кратность π_λ в M_λ равна 1.

Теперь рассмотрим представление $\widetilde{M}_\alpha := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\alpha$, где $\varepsilon_\alpha := \varepsilon_{\mathfrak{S}_\alpha}$ – знакопеременное представление $\mathfrak{S}_\alpha$. Как раскладывается на неприводимые оно?

- Напоминание: $\pi_{\lambda'} = \pi_\lambda \otimes \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = \varepsilon_{\mathfrak{S}_n}$.

Модули $\widetilde{M}_\alpha$

Что мы выяснили про разложение модуля Юнга на неприводимые?

- π_μ входит в $M_\lambda \implies \mu \trianglerighteq \lambda$,
- кратность π_λ в M_λ равна 1.

Теперь рассмотрим представление $\widetilde{M}_\alpha := \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\alpha$, где $\varepsilon_\alpha := \varepsilon_{\mathfrak{S}_\alpha}$ – знакопеременное представление $\mathfrak{S}_\alpha$. Как раскладывается на неприводимые оно?

- Напоминание: $\pi_{\lambda'} = \pi_\lambda \otimes \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = \varepsilon_{\mathfrak{S}_n}$.

Лемма

$\operatorname{Ind}_H^G \operatorname{Res}_H^G \pi \simeq \pi \otimes \operatorname{Ind}_H^G \operatorname{id}_H$.

Модули $\widetilde{M}_\alpha$

Что мы выяснили про разложение модуля Юнга на неприводимые?

- π_μ входит в $M_\lambda \implies \mu \trianglerighteq \lambda$,
- кратность π_λ в M_λ равна 1.

Теперь рассмотрим представление $\widetilde{M}_\alpha := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\alpha}^{\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\alpha$, где $\varepsilon_\alpha := \varepsilon_{\mathfrak{S}_\alpha}$ – знакопеременное представление $\mathfrak{S}_\alpha$. Как раскладывается на неприводимые оно?

- Напоминание: $\pi_{\lambda'} = \pi_\lambda \otimes \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n = \varepsilon_{\mathfrak{S}_n}$.

Лемма

$\mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Res}_H^G \pi \simeq \pi \otimes \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{id}_H$.

Доказательство. Пусть V – пространство π и $\mathcal{S}$ – система представителей G/H. Тогда л.ч. $= \bigoplus_{s \in \mathcal{S}} sV$, п.ч. $= V \otimes L(G/H)$ и легко проверить, что естественный изоморфизм – сплетающий оператор ($\bigstar$)

.

Предложение

$$\widetilde{M}_{\lambda'} = \bigoplus_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\mu'\lambda'} \pi_\mu .$$

Предложение

$$\widetilde{M}_{\lambda'} = \bigoplus_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\mu'\lambda'} \pi_\mu.$$

Доказательство.

- Имеем $\widetilde{M}_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \varepsilon_{\boldsymbol{n}} = \varepsilon_{\boldsymbol{n}} \otimes \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_\lambda = \varepsilon_{\boldsymbol{n}} \otimes M_\lambda$.

Предложение

$$\widetilde{M}_{\lambda'} = \bigoplus_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\mu'\lambda'} \pi_\mu.$$

Доказательство.

- Имеем $\widetilde{M}_\lambda = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\lambda = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \varepsilon_n = \varepsilon_n \otimes \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_\lambda = \varepsilon_n \otimes M_\lambda$.
- Пусть ψ^λ и $\widetilde{\psi}^{\lambda'}$ – характеры M_λ и $\widetilde{M}_{\lambda'}$. Тогда $\langle \chi^\mu, \widetilde{\psi}^{\lambda'} \rangle = \langle \chi^\mu, \chi^{(1^n)} \psi^{\lambda'} \rangle = \langle \chi^{(1^n)} \chi^\mu, \psi^{\lambda'} \rangle = \langle \chi^{\mu'}, \psi^{\lambda'} \rangle = K_{\mu'\lambda'}$. Значит, $\langle \pi_\mu, \widetilde{M}_{\lambda'} \rangle = K_{\mu'\lambda'}$.

Предложение

$$\widetilde{M}_{\lambda'} = \bigoplus_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\mu'\lambda'} \pi_\mu.$$

Доказательство.

- Имеем $\widetilde{M}_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \varepsilon_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{Res}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \varepsilon_n = \varepsilon_n \otimes \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_\lambda = \varepsilon_n \otimes M_\lambda$.
- Пусть ψ^λ и $\widetilde{\psi}^{\lambda'}$ – характеры M_λ и $\widetilde{M}_{\lambda'}$. Тогда $\langle \chi^\mu, \widetilde{\psi}^{\lambda'} \rangle = \langle \chi^\mu, \chi^{(1^n)} \psi^{\lambda'} \rangle = \langle \chi^{(1^n)} \chi^\mu, \psi^{\lambda'} \rangle = \langle \chi^{\mu'}, \psi^{\lambda'} \rangle = K_{\mu'\lambda'}$. Значит, $\langle \pi_\mu, \widetilde{M}_{\lambda'} \rangle = K_{\mu'\lambda'}$.
- В частности, π_μ входит в $\widetilde{M}_{\lambda'} \implies \lambda' \trianglelefteq \mu' \iff \mu \trianglelefteq \lambda$.

Соответствие Фробениуса–Юнга

Итого:

- π_μ входит в M_λ при $\mu \trianglerighteq \lambda$,
- π_μ входит в $\widetilde{M}_{\lambda'}$ при $\mu \trianglelefteq \lambda$,
- кратность π_λ в M_λ и $\widetilde{M}_{\lambda'}$ равна 1.

Значит, π_λ – единственное общее неприводимое подпредставление в M_λ и $\widetilde{M}_{\lambda'}$.

Следствие (соответствие Фробениуса–Юнга)

π_λ можно охарактеризовать как единственное неприводимое представление, содержащееся одновременно в M_λ и $\widetilde{M}_{\lambda'}$.

Итого:

- π_μ входит в M_λ при $\mu \trianglerighteq \lambda$,
- π_μ входит в $\widetilde{M}_{\lambda'}$ при $\mu \trianglelefteq \lambda$,
- кратность π_λ в M_λ и $\widetilde{M}_{\lambda'}$ равна 1.

Значит, π_λ – единственное общее неприводимое подпредставление в M_λ и $\widetilde{M}_{\lambda'}$.

Следствие (соответствие Фробениуса–Юнга)

π_λ можно охарактеризовать как единственное неприводимое представление, содержащееся одновременно в M_λ и $\widetilde{M}_{\lambda'}$.

Замечание. Матрица чисел Костки $(K_{\mu\lambda})_{\mu,\lambda\vdash n}$ – целочисленная строго верхняя унитреугольная $\implies$ обратная матрица $(\widetilde{K}_{\mu\lambda})_{\mu,\lambda\vdash n}$ также целочисленная строго верхняя унитреугольная $\implies$

$$\psi^\mu = \sum_{\lambda \trianglerighteq \mu} K_{\lambda\mu}\chi^\lambda, \quad \chi^\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} \widetilde{K}_{\mu\lambda}\psi^\lambda.$$