Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 11. Применения теории симметрических функций к теории представлений симметрических групп

Н. В. Цилевич

12 ноября 2021 г.

Косые представления

- Косая диаграмма $\lambda/\mu \rightsquigarrow$ косой характер $\chi^{\lambda/\mu}$: $\operatorname{ch} \chi^{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}$.

Косые представления

- Косая диаграмма $\lambda/\mu \rightsquigarrow$ косой характер $\chi^{\lambda/\mu}$: $\operatorname{ch} \chi^{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}$.
- $\langle \chi^{\lambda/\mu}, \chi^{\nu} \rangle = \langle s_{\lambda/\mu}, s_{\nu} \rangle = c^{\lambda}_{\mu\nu} > 0 \implies$ это характер настоящего косого представления $\pi_{\lambda/\mu}$.

Косые представления

- Косая диаграмма $\lambda/\mu \rightsquigarrow$ косой характер $\chi^{\lambda/\mu}$: $\operatorname{ch}\chi^{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}$.
- $\langle\chi^{\lambda/\mu}, \chi^{\nu}\rangle = \langle s_{\lambda/\mu}, s_{\nu}\rangle = c^{\lambda}_{\mu\nu} > 0 \implies$ это характер настоящего косого представления $\pi_{\lambda/\mu}$.
- $\dim \pi_{\lambda/\mu} = \langle s_{\lambda/\mu}, s_{(1^n)}\rangle = K_{\lambda/\mu,(1)^n} = \#\,\mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$.

Косые представления

- Косая диаграмма $\lambda/\mu \rightsquigarrow$ косой характер $\chi^{\lambda/\mu}$: $\operatorname{ch}\chi^{\lambda/\mu} = s_{\lambda/\mu}$.
- $\langle \chi^{\lambda/\mu}, \chi^{\nu}\rangle = \langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu\rangle = c^{\lambda}_{\mu\nu} > 0 \implies$ это характер настоящего косого представления $\pi_{\lambda/\mu}$.
- $\dim \pi_{\lambda/\mu} = \langle s_{\lambda/\mu}, s_{(1^n)}\rangle = K_{\lambda/\mu,(1)^n} = \#\,\mathrm{SYT}(\lambda/\mu)$.
- $c^{\lambda}_{\mu\nu} = \langle \chi^{\lambda/\mu}, \chi^{\nu}\rangle = \langle s_{\lambda/\mu}, s_\nu\rangle = \langle s_\lambda, s_\mu s_\nu\rangle =$ $\langle \chi^{\lambda}, \operatorname{Ind}^{\mathfrak{S}_{m+n}}_{\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n}(\chi^\mu\times\chi^\nu)\rangle = \langle \operatorname{Res}^{\mathfrak{S}_{m+n}}_{\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n}\chi^\lambda, \chi^\mu\times\chi^\nu\rangle \implies$ $\operatorname{Res}^{\mathfrak{S}_{m+n}}_{\mathfrak{S}_m\times\mathfrak{S}_n}\chi^\lambda = \sum_{\mu,\nu} c^{\lambda}_{\mu\nu}(\chi^\mu\times\chi^\nu) = \sum_{\mu\subseteq\lambda}\chi^\mu\times\chi^{\lambda/\mu}$.

- ($\star$) Симметричные матрицы $M_n^s := \{(a_{ij})_{i,j=1}^n : a_{ij} = a_{ji},\ a_{ii} = 0\}$.
  Пусть π_n^s — представление $\mathfrak{S}_n$ в M_n^s.
  Тогда $\pi_n^s = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-2}\times\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id} \implies \mathrm{ch}\,\pi_n^s = h_{n-2}h_2 = s_{(n-2)}h_2 =$
  $= \sum_{\lambda\colon \lambda/(n-2)\in \mathrm{HS}(2)} s_\lambda = s_{(n)} + s_{(n-1,1)} + s_{(n-2,2)} \implies$
  $\pi_n^s = \pi_{(n)} + \pi_{(n-1,1)} + \pi_{(n-2,2)}$.
  - $\pi_{(n)} = \{(a_{ij}) \in M_n^s \colon a_{ij} \equiv a\}$.
  - $\pi_{(n-1,1)} = \{(a_{ij}) \in M_n^s \colon a_{ij} = \alpha_i + \alpha_j$, где $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^n,\ \sum \alpha_i = 0\}$.
  - $\pi_{(n-2,2)} = \{(a_{ij}) \in M_n^s \colon \sum_j a_{ij} = 0$ для любого $i\}$.

- ($\star$) Симметричные матрицы $M_n^s := \{(a_{ij})_{i,j=1}^n : a_{ij} = a_{ji},\ a_{ii} = 0\}$.
  Пусть π_n^s — представление $\mathfrak{S}_n$ в M_n^s.
  Тогда $\pi_n^s = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-2}\times\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}\,\mathrm{id} \implies \mathrm{ch}\,\pi_n^s = h_{n-2}h_2 = s_{(n-2)}h_2 =$
  $$= \sum_{\lambda\colon \lambda/(n-2)\in \mathrm{HS}(2)} s_\lambda = s_{(n)} + s_{(n-1,1)} + s_{(n-2,2)} \implies$$
  $\pi_n^s = \pi_{(n)} + \pi_{(n-1,1)} + \pi_{(n-2,2)}$.
  - $\pi_{(n)} = \{(a_{ij}) \in M_n^s\colon a_{ij} \equiv a\}$.
  - $\pi_{(n-1,1)} = \{(a_{ij}) \in M_n^s\colon a_{ij} = \alpha_i + \alpha_j$, где $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^n,\ \sum \alpha_i = 0\}$.
  - $\pi_{(n-2,2)} = \{(a_{ij}) \in M_n^s\colon \sum_j a_{ij} = 0$ для любого $i\}$.
- ($\star$) Кососимметричные матрицы $M_n^a := \{(a_{ij})_{i,j=1}^n : a_{ij} = -a_{ji}\}$.
  Пусть π_n^a — представление $\mathfrak{S}_n$ в M_n^a.
  Тогда $\pi_n^a = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{n-2}\times\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\mathrm{id}_{n-2} \times \mathrm{sgn}_2) \implies$
  $$\mathrm{ch}\,\pi_n^a = h_{n-2}e_2 = \sum_{\lambda\colon \lambda/(n-2)\in \mathrm{VS}(2)} s_\lambda = s_{(n-1,1)} + s_{(n-2,1^2)} \implies$$
  $\pi_n^a = \pi_{(n-1,1)} + \pi_{(n-2,1^2)}$.
  - $\pi_{(n-1,1)} = \{(a_{ij}) \in M_n^a\colon a_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$, где $(\alpha_i) \in \mathbb{C}^n,\ \sum \alpha_i = 0\}$.
  - $\pi_{(n-2,1^2)} = \{(a_{ij}) \in M_n^a\colon \sum_j a_{ij} = 0$ для любого $i\}$.

Обязательные упражнения

- (★) Разложить на неприводимые следующие представления $\mathfrak{S}_n$:
  - действие на k-подмножествах в $[n]$;
  - действие на упорядоченных парах элементов из $[n]$.
- (★) Найти $\chi^\lambda((n))$ и $\chi^{\lambda/\mu}((n))$.

Ещё один пример

- V – векторное пространство над $\mathbb{Q}$ с базисом $v_1, \ldots, v_n \implies$ $\mathfrak{S}_n$ действует на V перестановками координат: $w \cdot v_i = v_{w^{-1}(i)}$.
- $\mathfrak{S}_n$ действует на $\Lambda^k V$: $w\big(v_i \wedge v_j \wedge \cdots\big) = v_{w^{-1}(i)} \wedge v_{w^{-1}(j)} \wedge \cdots$.

Как это представление ρ_k раскладывается на неприводимые?

Ещё один пример

- V – векторное пространство над $\mathbb{Q}$ с базисом $v_1, \ldots, v_n \implies \mathfrak{S}_n$ действует на V перестановками координат: $w \cdot v_i = v_{w^{-1}(i)}$.
- $\mathfrak{S}_n$ действует на $\Lambda^k V$: $w(v_i \wedge v_j \wedge \cdots) = v_{w^{-1}(i)} \wedge v_{w^{-1}(j)} \wedge \cdots$.

Как это представление ρ_k раскладывается на неприводимые?

- A – оператор на V с с.ч. $\theta_1, \ldots, \theta_n \implies \Lambda^k A$ – оператор на $\Lambda^k V$ с с.ч. $\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Ещё один пример

- V – векторное пространство над $\mathbb{Q}$ с базисом $v_1, \ldots, v_n \implies$ $\mathfrak{S}_n$ действует на V перестановками координат: $w \cdot v_i = v_{w^{-1}(i)}$.
- $\mathfrak{S}_n$ действует на $\Lambda^k V$: $w(v_i \wedge v_j \wedge \cdots) = v_{w^{-1}(i)} \wedge v_{w^{-1}(j)} \wedge \cdots$.

Как это представление ρ_k раскладывается на неприводимые?

- A – оператор на V с с.ч. $\theta_1, \ldots, \theta_n \implies \Lambda^k A$ – оператор на $\Lambda^k V$ с с.ч. $\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_k}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$.
- $\sum_{k=0}^{n} \left(\operatorname{tr} \Lambda^k A\right)(-q)^k = (1 - \theta_1 q) \cdots (1 - \theta_n q) = \det(I - qA)$.

Ещё один пример

- V – векторное пространство над $\mathbb{Q}$ с базисом $v_1, \ldots, v_n \implies$ $\mathfrak{S}_n$ действует на V перестановками координат: $w \cdot v_i = v_{w^{-1}(i)}$.
- $\mathfrak{S}_n$ действует на $\Lambda^k V$: $w(v_i \wedge v_j \wedge \cdots) = v_{w^{-1}(i)} \wedge v_{w^{-1}(j)} \wedge \cdots$.

Как это представление ρ_k раскладывается на неприводимые?

- A – оператор на V с с.ч. $\theta_1, \ldots, \theta_n \implies \Lambda^k A$ – оператор на $\Lambda^k V$ с с.ч. $\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_k}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\operatorname{tr} \Lambda^k A\right) (-q)^k = (1 - \theta_1 q) \cdots (1 - \theta_n q) = \det(I - qA)$.
- $w \in \mathfrak{S}_n$ – циклового типа $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_\ell) \implies$ $\det(I - qw) = (1 - q^{\mu_1})(1 - q^{\mu_2}) \cdots (1 - q^{\mu_\ell})$.

Ещё один пример

- V – векторное пространство над $\mathbb{Q}$ с базисом $v_1, \ldots, v_n \implies$ $\mathfrak{S}_n$ действует на V перестановками координат: $w \cdot v_i = v_{w^{-1}(i)}$.
- $\mathfrak{S}_n$ действует на $\Lambda^k V$: $w\bigl(v_i \wedge v_j \wedge \cdots\bigr) = v_{w^{-1}(i)} \wedge v_{w^{-1}(j)} \wedge \cdots$.

Как это представление ρ_k раскладывается на неприводимые?

- A – оператор на V с с.ч. $\theta_1, \ldots, \theta_n \implies \Lambda^k A$ – оператор на $\Lambda^k V$ с с.ч. $\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_k}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\operatorname{tr} \Lambda^k A\right)(-q)^k = (1 - \theta_1 q) \cdots (1 - \theta_n q) = \det(I - qA)$.
- $w \in \mathfrak{S}_n$ – циклового типа $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_\ell) \implies$ $\det(I - qw) = (1 - q^{\mu_1})(1 - q^{\mu_2}) \cdots (1 - q^{\mu_\ell})$.
- $\Psi_k := \chi_{\rho_k} \implies \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Psi_k(w)(-q)^k = (1 - q^{\mu_1})(1 - q^{\mu_2}) \cdots (1 - q^{\mu_\ell})$.

Ещё один пример

- V – векторное пространство над $\mathbb{Q}$ с базисом $v_1, \ldots, v_n \implies$ $\mathfrak{S}_n$ действует на V перестановками координат: $w \cdot v_i = v_{w^{-1}(i)}$.
- $\mathfrak{S}_n$ действует на $\Lambda^k V$: $w(v_i \wedge v_j \wedge \cdots) = v_{w^{-1}(i)} \wedge v_{w^{-1}(j)} \wedge \cdots$.

Как это представление ρ_k раскладывается на неприводимые?

- A – оператор на V с с.ч. $\theta_1, \ldots, \theta_n \implies \Lambda^k A$ – оператор на $\Lambda^k V$ с с.ч. $\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_k}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\operatorname{tr} \Lambda^k A\right)(-q)^k = (1-\theta_1 q)\cdots(1-\theta_n q) = \det(I - qA)$.
- $w \in \mathfrak{S}_n$ – циклового типа $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_\ell) \implies$ $\det(I - qw) = (1-q^{\mu_1})(1-q^{\mu_2})\cdots(1-q^{\mu_\ell})$.
- $\Psi_k := \chi_{\rho_k} \implies \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Psi_k(w)(-q)^k = (1-q^{\mu_1})(1-q^{\mu_2})\cdots(1-q^{\mu_\ell})$.
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\operatorname{ch} \Psi_k)(-q)^k = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ \rho(w)=\mu}} (1-q^{\mu_1})\cdots(1-q^{\mu_\ell})\, p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_\ell}$.

- $p_j(-qx) = (-1)^j q^j p_j(x)$ и $\omega(p_j) = (-1)^{j-1} p_j \implies$
  $(1 - q^j) p_j(x) = \omega_y p_j(x, y)|_{y=-qx}$.

- $p_j(-qx) = (-1)^j q^j p_j(x)$ и $\omega(p_j) = (-1)^{j-1} p_j \implies$
  $(1-q^j) p_j(x) = \omega_y p_j(x,y)|_{y=-qx}$.
- $$\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{ch}\, \Psi_k)\,(-q)^k = \omega_y \left[\frac{1}{n!} \sum_w p_{\rho(w)}(x,y)\right]_{y=-qx} =$$
  $$= \omega_y h_n(x,y)|_{y=-qx} = \omega_y \sum_{j=0}^{n} s_j(x) s_{n-j}(y)|_{y=-qx} =$$
  $$= \sum_{j=0}^{n} s_j(x) s_{1^{n-j}}(y)|_{y=-qx} = \sum_{j=0}^{n} (-q)^{n-j} s_j(x) s_{1^{n-j}}(x).$$

- $p_j(-qx) = (-1)^j q^j p_j(x)$ и $\omega(p_j) = (-1)^{j-1} p_j \implies$ $(1-q^j)p_j(x) = \omega_y p_j(x,y)|_{y=-qx}$.
- $$\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{ch}\,\Psi_k)\,(-q)^k = \omega_y \left[\frac{1}{n!}\sum_w p_{\rho(w)}(x,y)\right]_{y=-qx} =$$ $$= \omega_y h_n(x,y)|_{y=-qx} = \omega_y \sum_{j=0}^{n} s_j(x) s_{n-j}(y)|_{y=-qx} =$$ $$= \sum_{j=0}^{n} s_j(x) s_{1^{n-j}}(y)|_{y=-qx} = \sum_{j=0}^{n} (-q)^{n-j} s_j(x) s_{1^{n-j}}(x).$$
- Обозначим $\gamma_j := (n-j, 1^j)$. По правилу Пиери $s_j s_{1^{n-j}} = s_{\gamma_{n-j}} + s_{\gamma_{n-j-1}}$.

- $p_j(-qx) = (-1)^j q^j p_j(x)$ и $\omega(p_j) = (-1)^{j-1} p_j \implies$
  $(1-q^j)p_j(x) = \omega_y p_j(x,y)|_{y=-qx}$.
- $\sum\limits_{k=0}^{n} (\mathrm{ch}\,\Psi_k)\,(-q)^k = \omega_y \left[\frac{1}{n!}\sum\limits_{w} p_{\rho(w)}(x,y)\right]_{y=-qx} =$
  $= \omega_y h_n(x,y)|_{y=-qx} \ = \omega_y \sum\limits_{j=0}^{n} s_j(x) s_{n-j}(y)|_{y=-qx} =$
  $= \sum\limits_{j=0}^{n} s_j(x) s_{1^{n-j}}(y)|_{y=-qx} = \sum\limits_{j=0}^{n} (-q)^{n-j} s_j(x) s_{1^{n-j}}(x).$
- Обозначим $\gamma_j := (n-j, 1^j)$. По правилу Пиери
  $s_j s_{1^{n-j}} = s_{\gamma_{n-j}} + s_{\gamma_{n-j-1}}$.
- $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{ch}\,\Psi_k q^k = \sum\limits_{j=0}^{n} q^{n-j}(s_{\gamma_{n-j}} + s_{\gamma_{n-j-1}}) \implies \mathrm{ch}\,\Psi_k = s_{\gamma_k} + s_{\gamma_{k-1}}$.

Итого: $\rho_k = \pi_{\gamma_k} + \pi_{\gamma_{k-1}}$.

И ещё один пример

- Аналогично $\mathfrak{S}_n$ действует на $\mathbb{Q}^k[v_1, \ldots, v_n]$:
  $w(v_1^{a_1} v_2^{a_2} \cdots) = v_{w^{-1}(1)}^{a_1} v_{w^{-1}(2)}^{a_2} \cdots$.
- $\psi^k :=$ характер этого представления (чему равна его степень?).

Найдём $\sum_{k \geq 0} (\mathrm{ch}\, \psi^k)\, q^k$.

И ещё один пример

- Аналогично $\mathfrak{S}_n$ действует на $\mathbb{Q}^k[v_1, \dots, v_n]$: $w(v_1^{a_1} v_2^{a_2} \cdots) = v_{w^{-1}(1)}^{a_1} v_{w^{-1}(2)}^{a_2} \cdots$.
- $\psi^k :=$ характер этого представления (чему равна его степень?).

Найдём $\sum\limits_{k\ge 0} \left(\operatorname{ch} \psi^k\right) q^k$.

- A – оператор на V с с.ч. $\theta_1, \dots, \theta_n \implies S^k A$ – оператор на $\mathbb{Q}^k[v_1, \dots, v_n]$ с с.ч. $\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_k}$, $1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n$.

И ещё один пример

- Аналогично $\mathfrak{S}_n$ действует на $\mathbb{Q}^k[v_1, \ldots, v_n]$:
$w(v_1^{a_1} v_2^{a_2} \cdots) = v_{w^{-1}(1)}^{a_1} v_{w^{-1}(2)}^{a_2} \cdots$.
- $\psi^k :=$ характер этого представления (чему равна его степень?).

Найдём $\sum\limits_{k \geq 0} (\operatorname{ch} \psi^k)\, q^k$.

- A – оператор на V с с.ч. $\theta_1, \ldots, \theta_n \implies S^k A$ – оператор на $\mathbb{Q}^k[v_1, \ldots, v_n]$ с с.ч. $\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_k}$, $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$.
- $\sum\limits_{k \geq 0} (\operatorname{tr} S^k A)\, q^k = \frac{1}{(1-\theta_1 q)\cdots(1-\theta_n q)} = \frac{1}{\det(I - qA)}$.

И ещё один пример

- Аналогично $\mathfrak{S}_n$ действует на $\mathbb{Q}^k[v_1, \dots, v_n]$:
  $w(v_1^{a_1} v_2^{a_2} \cdots) = v_{w^{-1}(1)}^{a_1} v_{w^{-1}(2)}^{a_2} \cdots$.
- $\psi^k :=$ характер этого представления (чему равна его степень?).

Найдём $\sum_{k \geq 0} (\operatorname{ch} \psi^k)\, q^k$.

- A – оператор на V с с.ч. $\theta_1, \dots, \theta_n \implies S^k A$ – оператор на $\mathbb{Q}^k[v_1, \dots, v_n]$ с с.ч. $\theta_{i_1} \cdots \theta_{i_k}$, $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$.
- $\sum_{k \geq 0} (\operatorname{tr} S^k A)\, q^k = \frac{1}{(1-\theta_1 q) \cdots (1-\theta_n q)} = \frac{1}{\det(I - qA)}$.
- $\sum_{k \geq 0} (\operatorname{ch} \psi^k)\, q^k = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ \rho(w) = \mu}} \frac{p_{\mu_1} \cdots p_{\mu_\ell}}{(1-q^{\mu_1}) \cdots (1-q^{\mu_\ell})} =$

  $= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ \rho(w) = \mu}} p_\mu(1, q, q^2, \dots) p_\mu = \sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(1, q, q^2, \dots) s_\lambda$.