Теория представлений симметрических групп

Лекция 11. Характеры модулей Юнга и неприводимых представлений

Н. В. Цилевич

12 ноября 2021 г.

Характеры индуцированных представлений

- $x = (x_1, \ldots, x_N)$ – набор переменных;
- Симметрические степенные суммы:
  - $p_k(x) := \sum_j x_j^k$,
  - $\lambda = (k^{i_k}) \rightsquigarrow p_\lambda(x) := \prod_{k \geqslant 1} p_k(x)^{i_k}$;
- $x^\lambda := \prod_j x_j^{\lambda_j}$.

Характеры индуцированных представлений

- $x = (x_1, \ldots, x_N)$ – набор переменных;
- Симметрические степенные суммы:
  - $p_k(x) := \sum_j x_j^k$,
  - $\lambda = (k^{i_k}) \rightsquigarrow p_\lambda(x) := \prod_{k \geqslant 1} p_k(x)^{i_k}$;
- $x^\lambda := \prod_j x_j^{\lambda_j}$.

Напоминание: ψ^λ – характер представления $M_\lambda = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\lambda}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{id}_{\mathfrak{S}_\lambda}$.

Теорема (характеры индуцированных представлений)

Если $g \in \mathfrak{S}_n$ – перестановка циклового типа μ, то

$$\boxed{\psi^\lambda(g) = [x^\lambda] p_\mu(x)},$$

где предполагается, что $N \geqslant \ell(\lambda)$.

Доказательство

- Вспомним формулу Фробениуса:

$$\chi_{\mathrm{Ind}_K^G \rho}(g) = \sum_{s \in \mathcal{S}\colon s^{-1}gs \in K} \chi^\rho(s^{-1}gs) = \frac{1}{|K|} \sum_{x \in G\colon x^{-1}gx \in K} \chi^\rho(x^{-1}gx).$$

- Таким образом,

$$\psi^\lambda(g) = \frac{1}{\prod \lambda_j!} \cdot \#\{x \in \mathfrak{S}_n : x^{-1}gx \in \mathfrak{S}_\lambda\}.$$

Доказательство

- Вспомним формулу Фробениуса:

$$\chi_{\mathrm{Ind}_K^G \rho}(g) = \sum_{s \in \mathcal{S}\colon s^{-1}gs \in K} \chi^{\rho}(s^{-1}gs) = \frac{1}{|K|} \sum_{x \in G\colon x^{-1}gx \in K} \chi^{\rho}(x^{-1}gx).$$

- Таким образом,

$$\psi^{\lambda}(g) = \frac{1}{\prod \lambda_j!} \cdot \#\{x \in \mathfrak{S}_n : x^{-1}gx \in \mathfrak{S}_{\lambda}\}.$$

- Пусть Z_g – централизатор g. Имеем:

$$\#\{\ldots\} = \#(C_{\mu} \cap \mathfrak{S}_{\lambda}) \cdot \#Z_g.$$

- Пусть $\mu = (k^{i_k})$. Знаем:

$$\#Z_g = \frac{n!}{\#C_{\mu}} = \prod k^{i_k} i_k!.$$

Продолжение доказательства

- Подсчитаем $\#(C_\mu \cap \mathfrak{S}_\lambda)$.
  - $\sigma \in C_\mu \cap \mathfrak{S}_\lambda \rightsquigarrow$ набор разбиений $(k^{r_{jk}}) \vdash \lambda_j$ на длины циклов;
  - $\sum\limits_j r_{jk} = i_k$.
- Таким образом,

$$\#(C_\mu \cap \mathfrak{S}_\lambda) = \sum_r \prod_{j \geqslant 1} \frac{\lambda_j!}{\prod\limits_{k \geqslant 1} k^{r_{jk}} r_{jk}!},$$

где сумма по $r = (r_{jk}) : r_{jk} \geqslant 0, \sum\limits_k k r_{jk} = \lambda_j, \sum\limits_j r_{jk} = i_k$.

Продолжение доказательства

- Подсчитаем $\#(C_\mu \cap \mathfrak{S}_\lambda)$.
  - $\sigma \in C_\mu \cap \mathfrak{S}_\lambda \rightsquigarrow$ набор разбиений $(k^{r_{jk}}) \vdash \lambda_j$ на длины циклов;
  - $\sum\limits_j r_{jk} = i_k$.
- Таким образом,

$$\#(C_\mu \cap \mathfrak{S}_\lambda) = \sum_r \prod_{j \geqslant 1} \frac{\lambda_j!}{\prod\limits_{k \geqslant 1} k^{r_{jk}} r_{jk}!},$$

где сумма по $r = (r_{jk}) : r_{jk} \geqslant 0, \sum\limits_k k r_{jk} = \lambda_j, \sum\limits_j r_{jk} = i_k$.

- Итого:

$$\psi^\lambda(g) = \frac{\prod k^{i_k} i_k!}{\prod \lambda_j!} \cdot \#(C_\mu \cap \mathfrak{S}_\lambda) = \sum_r \prod_k \frac{i_k!}{\prod\limits_j r_{jk}!}.$$

Продолжение доказательства

- Подсчитаем $\#(C_\mu \cap \mathfrak{S}_\lambda)$.
  - $\sigma \in C_\mu \cap \mathfrak{S}_\lambda \rightsquigarrow$ набор разбиений $(k^{r_{jk}}) \vdash \lambda_j$ на длины циклов;
  - $\sum\limits_j r_{jk} = i_k$.
- Таким образом,

$$\#(C_\mu \cap \mathfrak{S}_\lambda) = \sum_r \prod_{j\geqslant 1} \frac{\lambda_j!}{\prod\limits_{k\geqslant 1} k^{r_{jk}} r_{jk}!},$$

где сумма по $r = (r_{jk}) : r_{jk} \geqslant 0, \sum\limits_k k r_{jk} = \lambda_j, \sum\limits_j r_{jk} = i_k$.

- Итого:

$$\psi^\lambda(g) = \frac{\prod k^{i_k} i_k!}{\prod \lambda_j!} \cdot \#(C_\mu \cap \mathfrak{S}_\lambda) = \sum_r \prod_k \frac{i_k!}{\prod\limits_j r_{jk}!}.$$

- Но это в точности $[x^\lambda] \prod\limits_{k\geqslant 1} (x_1^k + \ldots + x_N^k)^{i_k}$ (именно, r_{jk} – число раз, когда мы выбираем в скобке слагаемое x_j^k).

Пример

Теорема (характеры индуцированных представлений)

Если $g \in \mathfrak{S}_n$ – перестановка циклового типа μ, то

$$\boxed{\psi^\lambda(g) = [x^\lambda]p_\mu(x)},$$

где предполагается, что $N \geqslant \ell(\lambda)$.

Пусть $\lambda = (2,1) \implies$ достаточно $N = 2$ и $x^\lambda = x_1^2 x_2$.

- При $\mu = (3)$ имеем $p_{(3)} = x_1^3 + x_2^3 \implies \psi^\lambda(\mu) = 0$.
- При $\mu = (21)$ имеем $p_{(21)} = (x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2) \implies \psi^\lambda(\mu) = 1$.
- При $\mu = (1^3)$ имеем $p_{(1^3)} = (x_1 + x_2)^3 \implies \psi^\lambda(\mu) = 3$.

Формула Фробениуса

- $\Delta(x) := \prod_{1 \le i < j \le N} (x_i - x_j) = \det(x_i^{N-j})_{i,j=1}^N$ – определитель Вандермонда.
- $\delta := (N-1, N-2, \ldots, 1, 0)$ – лестничная диаграмма.
- $x^{\lambda+\delta} = \prod_j x_j^{\lambda_j + N - j}$, где $N \geqslant \ell(\lambda)$.

Теорема (формула Фробениуса для характеров)

Если $g \in \mathfrak{S}_n$ – перестановка циклового типа μ, то

$$\boxed{\chi^\lambda(g) = [x^{\lambda+\delta}]\,(\Delta(x) p_\mu(x))}.$$

Переформулировка:

$$\chi^\lambda(g) = [x^\lambda] \left(\prod_{i<j} \left(1 - \frac{x_j}{x_i}\right) p_\mu(x) \right).$$

Доказательство

- $\theta_\lambda(\cdot) :=$ п.ч. как функция классов.
- Утверждение:

$$\theta_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} L_{\mu\lambda}\chi^\mu, \text{ где } L_{\mu\lambda} \in \mathbb{Z} \text{ и } L_{\lambda\lambda} = 1.$$

Доказательство

- $\theta_\lambda(\cdot) :=$ п.ч. как функция классов.
- Утверждение:

$$\theta_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} L_{\mu\lambda} \chi^\mu, \text{ где } L_{\mu\lambda} \in \mathbb{Z} \text{ и } L_{\lambda\lambda} = 1.$$

- Вспомним: $[x^\lambda] p_\mu(x) = \psi^\lambda(\mu)$.
- $\Delta(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \prod x_i^{\sigma(N-j)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma x^{\sigma(\delta)}$.

Доказательство

- $\theta_\lambda(\cdot) :=$ п.ч. как функция классов.
- Утверждение:

$$\theta_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} L_{\mu\lambda} \chi^\mu, \text{ где } L_{\mu\lambda} \in \mathbb{Z} \text{ и } L_{\lambda\lambda} = 1.$$

- Вспомним: $[x^\lambda] p_\mu(x) = \psi^\lambda(\mu)$.
- $\Delta(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \prod x_i^{\sigma(N-j)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma x^{\sigma(\delta)}$.
- $\theta_\lambda(\mu) = [x^{\lambda+\delta}] \left(\Delta(x) p_\mu(x)\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma [x^{\lambda+\delta}] (x^{\sigma(\delta)} p_\mu(x)) =$
  $= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma [x^{\lambda+\delta-\sigma(\delta)}] p_\mu(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \psi^{\lambda+\delta-\sigma(\delta)}(\mu)$.

Доказательство

- $\theta_\lambda(\cdot) :=$ п.ч. как функция классов.
- Утверждение:

$$\theta_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} L_{\mu\lambda} \chi^\mu, \text{ где } L_{\mu\lambda} \in \mathbb{Z} \text{ и } L_{\lambda\lambda} = 1.$$

- Вспомним: $[x^\lambda] p_\mu(x) = \psi^\lambda(\mu)$.
- $\Delta(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \prod x_i^{\sigma(N-j)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma x^{\sigma(\delta)}$.
- $\theta_\lambda(\mu) = [x^{\lambda+\delta}] \left(\Delta(x) p_\mu(x)\right) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma [x^{\lambda+\delta}] (x^{\sigma(\delta)} p_\mu(x)) =$
  $= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma [x^{\lambda+\delta-\sigma(\delta)}] p_\mu(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \psi^{\lambda+\delta-\sigma(\delta)}(\mu)$.
- $\lambda + \delta - \sigma(\delta)$ получается из λ добавлением векторов вида $e_i - e_j$, где $i < j$, $\implies \lambda + \delta - \sigma(\delta) \trianglerighteq \lambda$ и равенство только при $\sigma = e$.
- В $M_{\lambda+\delta-\sigma(\delta)}$ входят только π_μ с $\mu \trianglerighteq \lambda + \delta - \sigma(\delta) \trianglerighteq \lambda \implies$ OK.

- Достаточно: $\langle \theta_\lambda, \theta_\lambda \rangle = 1$.
  Тогда $\sum L_{\mu\lambda}^2 = 1 \implies L_{\mu\lambda} = 0$ при $\mu \neq \lambda \implies \theta_\lambda = \chi^\lambda$.

- Достаточно: $\langle\theta_\lambda,\theta_\lambda\rangle = 1$.
  Тогда $\sum L_{\mu\lambda}^2 = 1 \implies L_{\mu\lambda} = 0$ при $\mu\neq\lambda \implies \theta_\lambda = \chi^\lambda$.
- $\langle\theta_\lambda,\theta_\lambda\rangle =$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{\rho=(k^{i_k})} \#C_\rho\cdot\theta_\lambda(\rho)^2 = \sum_{\rho=(k^{i_k})} \frac{[x^{\lambda+\delta}](\Delta(x)p_\mu(x))[y^{\lambda+\delta}](\Delta(y)p_\mu(y))}{\prod\limits_k k^{i_k} i_k!}.$$

- Достаточно: $\langle\theta_\lambda,\theta_\lambda\rangle = 1$.
  Тогда $\sum L_{\mu\lambda}^2 = 1 \implies L_{\mu\lambda} = 0$ при $\mu \neq \lambda \implies \theta_\lambda = \chi^\lambda$.
- $\langle\theta_\lambda,\theta_\lambda\rangle =$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\rho=(k^{i_k})} \#C_\rho \cdot \theta_\lambda(\rho)^2 = \sum_{\rho=(k^{i_k})} \frac{[x^{\lambda+\delta}](\Delta(x)p_\mu(x))[y^{\lambda+\delta}](\Delta(y)p_\mu(y))}{\prod\limits_k k^{i_k} i_k!}.$$

- $R(x,y) := \Delta(x)\Delta(y)S(x,y)$, где

$$S(x,y) := \sum_{(i_k)} \prod_k \frac{(p_k(x))^{i_k}(p_k(y))^{i_k}}{k^{i_k} i_k!} = \sum_{(i_k)} \prod_k \frac{\left(\frac{p_k(\{x_s y_t\})}{k}\right)^{i_k}}{i_k!},$$

сумма по $(i_1, i_2, \ldots) \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда $\langle\theta_\lambda,\theta_\lambda\rangle = [x^{\lambda+\delta}y^{\lambda+\delta}]R(x,y)$.

- $S(x,y) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \frac{(p_1/1)^{i_1}(p_2/2)^{i_2}\dots}{i_1!i_2!\dots} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i_k=0}^{\infty} \frac{(p_k/k)^{i_k}}{i_k!} \right) =$
  $= \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(\frac{p_k(\{x_s y_t\})}{k} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \exp\left(\sum_{s,t} \frac{x_s^k y_t^k}{k} \right) =$
  $= \exp\left(\sum_{s,t} \sum_{k} \frac{x_s^k y_t^k}{k} \right) = \exp\big(-\sum_{s,t} \ln(1 - x_s y_t) \big) = \prod_{s,t} (1 - x_s y_t)^{-1}.$

- $S(x,y)=\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\dots\frac{(p_1/1)^{i_1}(p_2/2)^{i_2}\dots}{i_1!i_2!\dots}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i_k=0}^{\infty}\frac{(p_k/k)^{i_k}}{i_k!}\right)=$
$=\prod_{k=1}^{\infty}\exp\left(\frac{p_k(\{x_s y_t\})}{k}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\exp\left(\sum_{s,t}\frac{x_s^k y_t^k}{k}\right)=$
$=\exp\left(\sum_{s,t}\sum_{k}\frac{x_s^k y_t^k}{k}\right)=\exp\left(-\sum_{s,t}\ln(1-x_s y_t)\right)=\prod_{s,t}(1-x_s y_t)^{-1}.$
- Итого:

$$R(x,y)=\frac{\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)(y_i-y_j)}{\prod\limits_{i,j}(1-x_i y_j)}.$$

Лемма

$$\boxed{\frac{\prod\limits_{i<j}(z_j - z_i)(y_i - y_j)}{\prod\limits_{i,j}(z_i - y_j)} = \det\left(\frac{1}{z_i - y_j}\right)}.$$

Лемма

$$\boxed{\frac{\prod\limits_{i<j}(z_j - z_i)(y_i - y_j)}{\prod\limits_{i,j}(z_i - y_j)} = \det\left(\frac{1}{z_i - y_j}\right)}.$$

Доказательство.

- Умножим обе части на $\prod\limits_{i,j}(z_i - y_j)$:

$$\prod_{i<j}(z_j - z_i)(y_i - y_j) = \det\left(\frac{1}{z_i - y_j}\right)\prod_{i,j}(z_i - y_j).$$

- П.ч. $= 0$ при $z_i = z_j$ или $y_i = y_j \implies$ делится на $\Delta(z)\Delta(y) =$ л.ч.
- Обе части – однородные многочлены степени $N(N-1) \implies$ л.ч. $= c_N \cdot$п.ч.

Продолжение доказательства

- Пусть $A_N := \frac{\prod\limits_{i<j}(z_j - z_i)(y_i - y_j)}{\prod\limits_{i,j}(z_i - y_j)}$, $B_N := \det\left(\frac{1}{z_i - y_j}\right)$.

  Имеем: $A_N = c_N \cdot B_N$.
- Докажем, что $c_N = 1$, индукцией по N.
  - <u>База</u> $N = 1$ очевидна.
  - <u>Переход:</u>

$$(z_N - y_N)A_N\,|_{z_N = y_N} = A_{N-1}\frac{\prod\limits_{i<N}(z_N - z_i)(y_i - y_N)}{\prod\limits_{i<N}(z_N - y_i)(z_i - y_N)}\,|_{z_N = y_N} = A_{N-1},$$

$(z_N - y_N)B_N\,|_{z_N = y_N} = B_{N-1} \implies c_N = 1$ по предположению индукции.

Тождество Коши

Следствие (тождество Коши)

$$\boxed{R(x,y) = \det\left(\frac{1}{1 - x_i y_j}\right)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \frac{(-1)^\sigma}{\prod_{j=1}^{N} (1 - x_j y_{\sigma(j)})}.$$

Тождество Коши

Следствие (тождество Коши)

$$\boxed{R(x,y) = \det\left(\frac{1}{1 - x_i y_j}\right)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} \frac{(-1)^\sigma}{\prod_{j=1}^{N} (1 - x_j y_{\sigma(j)})}.$$

Доказательство.

- Вспомним: $R(x,y) = \frac{\prod_{i<j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j}(1 - x_i y_j)}$.
- Лемма: $\frac{\prod_{i<j}(z_j - z_i)(y_i - y_j)}{\prod_{i,j}(z_i - y_j)} = \det\left(\frac{1}{z_i - y_j}\right)$.
- Подставим $z_i = 1/x_i \implies$ QED.

Окончание доказательства теоремы

- Вспоминаем: $\langle\theta_\lambda, \theta_\lambda\rangle = [x^{\lambda+\delta}y^{\lambda+\delta}]R(x, y)$, хотим $\langle\theta_\lambda, \theta_\lambda\rangle = 1$.
- Доказали: $R(x, y) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^{N} (1 - x_j y_{\sigma(j)})^{-1}$.
- Координаты вектора $\lambda + \delta$ строго убывают $\implies$ различны.

  Значит, $[x^{\lambda+\delta}y^{\lambda+\delta}] \prod_{j=1}^{N} (1 - x_j y_{\sigma(j)})^{-1} = 0$ при $\sigma \neq e$.
- При $\sigma = e$ этот коэффициент, очевидно, $= 1$.
- Итого: $\langle\theta_\lambda, \theta_\lambda\rangle = 1$, что и требовалось.

Пример

Итак, $\boxed{\chi^\lambda(g) = [x^{\lambda+\delta}]\,(\Delta(x)p_\mu(x))}$.

Вычислим значения характера $\chi^{(2,2)}$.

- Достаточно взять $N = 2$.
- $\chi^{(2,2)}(\mu) = [x_1^3 x_2^2]\,((x_1 - x_2)p_\mu(x))$.
  - $\chi^{(2,2)}(1^4) = [x_1^3 x_2^2]\,\big((x_1 - x_2)(x_1 + x_2)^4\big) = 2$;
  - $\chi^{(2,2)}(21^2) = [x_1^3 x_2^2]\,\big((x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2)^2\big) = 0$;
  - $\chi^{(2,2)}(2^2) = [x_1^3 x_2^2]\,\big((x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)^2\big) = 2$;
  - $\chi^{(2,2)}(31) = [x_1^3 x_2^2]\,\big((x_1 - x_2)(x_1^3 + x_2^3)(x_1 + x_2)\big) = -1$;
  - $\chi^{(2,2)}(4) = [x_1^3 x_2^2]\,\big((x_1 - x_2)(x_1^4 + x_2^4)\big) = 0$.