Аннотация лекции за 13.10.21.

§6. Области притяжения.

Цель этого параграфа — описать области притяжения устойчивых законов. Мы найдем условия, необходимые и достаточные для того, чтобы ф.р. F принадлежала области притяжения устойчивого закона с параметром α (сокращение $F \in D(\alpha)$). Мы их выведем из условий сходимости к заданному б.д. распределению.

Если $\{X_{nk}, k = 1, \dots, n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность серий независимых в каждой серии с.в., удовлетворяющая условию бесконечной малости (УБМ), то для сходимости последовательности распределений $\sum\limits_{k=1}^{n} X_{nk} - A_n$ к б.д. распределению необходимо и достаточно, чтобы

$$1) \quad \sum_{k=1}^{n} P(X_{nk} \geqslant x) \to -N(x), \quad \sum_{k=1}^{n} P(X_{nk} < -x) \to M(-x), \quad x > 0$$

$$2) \quad \limsup_{\varepsilon\to 0} \limsup \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2 = \limsup_{\varepsilon\to 0} \liminf \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2 = \sigma^2,$$

где $M(x)$, $N(x)$ и σ^2 — функции и параметр из формулы Леви для х.ф. б.д. распределения, σ_{nk}^2 — дисперсия X_{nk}, усеченной на уровне ε.

Если $\{X_n\}$ — последовательность н.о.р. с.в., $F(x)$ — их ф.р., $\{B_n\}$ — нормирующая последовательность, то, положив $X_{nk} = X_k/B_n$, мы получим схему серий, удовлетворяющую УБМ. Вид функций $M(x)$ и $N(x)$ и значение σ^2 для устойчивых законов нами найдены. 1) и 2) превращаются в условия, необходимые и достаточные для того, чтобы $F \in D(2)$ и $F \in D(\alpha)$, $\alpha < 2$. (В случае $D(2)$ в 2) $\limsup$ и $\liminf$ можно убрать (см. критерий нормальной сходимости)). Использование этих условий позволяет доказать следующий результат.

Теорема 9. *$F \in D(\alpha)$, $\alpha \in (0, 2]$, тогда и только тогда, когда $U_2(x) = \int\limits_{-x}^{x} u^2 dF(u)$ — п.м. (правильно меняющаяся) функция порядка $2 - \alpha$ и при $\alpha < 2$ выполняются соотношения $F(-x) \sim q\chi(x)$ и $1 - F(x) \sim q\chi(x)$ при $x \to \infty$, где $\chi(x) = F(-x) + 1 - F(x)$.*

Доказательство опирается также на ряд результатов для п.м. функций. Доказательство проведено при $\alpha = 2$ и в одну сторону для $\alpha < 2$.