Аннотация лекции за 20.10.21.

§6. Области притяжения (продолжение).

Завершено доказательство последней теоремы. Она дает следующие описания $D(2)$ и $D(\alpha)$.

Следствие 5. *$F \in D(2)$ тогда и только тогда, когда либо $EX^2 < \infty$, либо $U_2(x)$ — м.м. (медленно меняющаяся) функция с $U_2(\infty) = \infty$.*

Следствие 6. *$F \in D(\alpha)$, $\alpha < 2$ тогда и только тогда, когда $F(-x) \sim c_1 x^{-\alpha} L(x)$ и $1 - F(x) \sim c_2 x^{-\alpha} L(x)$ при $x \to \infty$, где $L(x)$ — м.м. функция.*

Выбор нормировки определен в доказательстве последней теоремы. Выберем $\{B_n\}$ такую, что

$$\frac{n}{B_n^2} U_2(B_n) \to 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{B_n^\alpha} L(B_n) \to 1.$$

Значит B_n отличается от $n^{1/\alpha}$ м.м. множителем. Самая простая м.м. функция — константа.

Если $B_n = an^{1/\alpha}$, то говорят, что F принадлежит области нормального притяжения соответствующего устойчивого закона и пишут $F \in DN(\alpha)$. Если нормировки другие, то говорят, что F принадлежит области ненормального притяжения соответствующего устойчивого закона. Т.е. всякий устойчивый закон (включая нормальный) имеет область нормального и область ненормального притяжения.

Следствие 7. *$F \in DN(2)$ тогда и только тогда, когда $EX^2 < \infty$.*

Следствие 8. *$F \in DN(\alpha)$, $\alpha < 2$ тогда и только тогда, когда $F(-x) \sim c_1 x^{-\alpha} a^\alpha$ и $1 - F(x) \sim c_2 x^{-\alpha} a^\alpha$.*

Глава 2. Большие уклонения.

§1. Сопряженные распределения.

Пусть X — с.в. с ф.р. $F(x)$ и п.ф.м. $\varphi(h) < \infty$ при $0 \leqslant h < h_0$. Сопряженной ф.р. называется

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{\varphi(h)} \int_{-\infty}^{x} e^{hu} dF(u).$$

Сопряженное распределение (в отличие от исходного) имеет все моменты. В частности, первые две логарифмические производные $\varphi(h)$ являются его средним и дисперсией. Кроме того,

$$P(X \geqslant x) = \varphi(h) \int\limits_x^\infty e^{-hu} d\overline{F}(u).$$

Следовательно, изучение вероятностей больших уклонений можно свести к изучению некоторых интегралов по сопряженному распределению. При этом имеют важное значение функции $\varphi(h)$, $m(h) = (\ln \varphi(h))'$, $\sigma^2(h) = (\ln \varphi(h))''$, $f(h) = hm(h) - \ln \varphi(h)$. Свойства этих функций сформулированы и доказаны.

§2. Неравенства для вероятностей больших уклонений. Теорема Чернова.

Лемма 5. *Пусть* $X, X_1, \ldots, X_n$ *— н.о.р.с.в. с* $EX \geqslant 0$ *и* $\varphi(h) < \infty$ *при* $0 \leqslant h < h_0$. *Положим* $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. *Тогда*

$$P(S_n \geqslant nm(h)) \leqslant e^{-nf(h)}, \quad P(S_n \geqslant nm(h) - 2\sqrt{n}\sigma(h)) \geqslant \frac{3}{4} e^{-nf(h) - 2\sqrt{n}h\sigma(h)}$$

для всех $0 \leqslant h < h_0$.

Лемма сначала доказана для $n = 1$. Для остальных n она получается заменой X на S_n. При этом соответствующие функции для S_n легко получаются из функций для X.