Аннотация лекции за 27.10.21.

§2. Неравенства для вероятностей больших уклонений. Теорема Чернова. (продолжение)

Доказана

Лемма 6. *Пусть выполнены условия предыдущей леммы. Пусть* $\{h_n\}$ *— последовательность положительных чисел такая, что* $h_n < h_0$, $h_n = O(1)$, $nf(h_n) \to \infty$. *Тогда* $h_n\sigma(h_n) = o(\sqrt{n}f(h_n))$ *и* $\sigma(h_n) = o(\sqrt{n}m(h_n))$.

Последняя лемма позводяет избавляться от "дефектов" в оценках снизу, оставляя только функции $m(h)$ $f(h)$ (как показано в следующем результате).

Следствие 9. *Пусть выполнены условия последней леммы. Тогда для любых положительных* ε *и* δ *неравенство*

$$P(S_n \geqslant nm(h_n)(1-\varepsilon)) \geqslant \frac{3}{4}e^{-nf(h_n)(1+\delta)}$$

выполняется для всех достаточно больших n.

Функцией больших уклонений (ФБУ) называется $\zeta(x) = f(m^{-1}(x))$. Она определяет асимптотику вероятностей больших уклонений.

Доказан следующий результат.

Теорема 10. *Пусть* $X, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *— н.о.р.с.в. с* $EX \geqslant 0$ *и* $\varphi(h) < \infty$ *при* $0 \leqslant h < h_0$. *Пусть* $\{x_n\}$ *— последовательность положительных чисел такая, что* $x_n \in (EX, A-\tau)$, $x_n = O(1)$, $n\zeta(x_n) \to \infty$ *и*

$$\limsup_{c \searrow 1} \limsup \frac{\zeta(cx_n)}{\zeta(x_n)} = 1. \qquad (*)$$

Тогда

$$\ln P(S_n \geqslant nx_n) \sim -n\zeta(x_n).$$

Условие $(*)$ легко проверяется в важных случаях $x_n = x$ (за счет выпуклости вниз $\zeta(x)$) и $x_n \to 0$ (за счет отыскания асимптотики $\zeta(x)$ в нуле.)

Следствие 10. *(теорема Чернова.) Пусть* $X, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *удовлетворяют условиям последней теоремы и* $x \in (EX, A)$. *Тогда*

$$\ln P(S_n \geqslant nx) \sim -n\zeta(x).$$