Аннотация лекции за 17.11.21.

§1. ЗПЛ и притяжение к асимметричным устойчивым законам (продолжение).

Завершено доказательство ЗПЛ.

Глава 4. Предельные теоремы для приращений сумм н.с.в.

§1. Универсальные предельные теоремы.

Пусть $X, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ — н.о.р.с.в. с $EX = 0$ и $\varphi(h) < \infty$ при $0 \leqslant h < h_0$. Пусть ф.р. $F(x)$ с.в. X принадлежит области нормального притяжения (с нормировками $B_n = n^{1/\alpha}$) асимметричного устойчивого закона с $\alpha \in (1, 2]$.

Пусть $a(x)$, $x > 0$ — вещественная функция такая, что $1 \leqslant a(x) \leqslant x$ и функции $a(x)$ и $x/a(x)$ не убывают. Положим $a_n = [a(n)]$.

В этой главе исследуется асимптотическое п.н. поведение максимумов

$$U_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant n - a_n} (S_{k+a_n} - S_k), \quad W_n = \max_{0 \leqslant k \leqslant n - a_n} \max_{0 \leqslant j \leqslant a_n} (S_{k+a_n} - S_k).$$

Задача: найти $\{b_n\}$ и необходимые и/или достаточные условия для

$$\limsup \frac{U_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

или, если возможно, для

$$\lim \frac{U_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

и аналогичных соотношений с W_n вместо U_n. Обсуждается, что в такую постановку включено много известных результатов (см. лекцию 1).

Положим

$$b_n = a_n \gamma\left(\frac{d_n}{a_n}\right),$$

где $\gamma(x) = \zeta^{-1}(x)$, $d_n = \ln \frac{n}{a_n} + \ln\ln n$. Так определенную нормировку назовем универсальной, т.к. она охватывает весь возможный диапазон a_n. Теоремы, где нормировка универсальная, назовем универсальными.

Главный результат этого параграфа — следующая универсальная теорема.

Теорема 14. *Пусть выполнены сформулированные выше условия и $d_n = O(a_n)$ и $d_n/a_n < 1/c_0$, где $\frac{1}{c_0} = \lim_{h \nearrow h_0} f(h)$.*

Тогда

$$\limsup \frac{U_n}{b_n} = \limsup \frac{W_n}{b_n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Если дополнительно $\ln\ln n = o\left(\ln\frac{n}{a_n}\right)$, *то в последнем соотношении можно заменить* $\limsup$ *на* $\lim$.

Обсуждаются возможные обобщения последней теоремы для зон ненормального притяжения рассматриваемых асимметричных устойчивых законов и для более слабых односторонних условий (условие Линника, момент порядка $p > 2$). Обсуждается оптимальность моментных условий.

Для доказательства оценки сверху доказан аналог неравенства Леви для двойного максимума. Затем доказана оценка сверху по экспоненциальной подпоследовательности.