Лекция 8

„Свойства М-регулярных последовательностей"

Proposition 4.3

Пусть $a_1, \dots, a_r$ — M-рег. послед-ть. Тогда для $\forall\ k_i \geq 1$, $1 \leq i \leq r$, послед-ть $(a_1^{k_1}, \dots, a_r^{k_r})$ тоже M-рег.

Proof. Инд. по r.

Дост. док., что $(a_1^{k_1}, a_2, \dots, a_r)$ — M-рег., т.к. тогда мы узнаем, что $(a_2, \dots, a_r)$ — $M/a_1^{k_1}$-рег., а отсюда $(a_2^{k_2}, \dots, a_r^{k_r})$ будет M/a_1^{k}-рег. по инд. предп. $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_r^{k_r})$ — M-рег.

Теперь инд. по k_1, случай $k_1 = 1$ тривиал. По инд. предп. $(a_1^{k_1-1}, a_2, \dots, a_r)$ — M-рег. и $(a_1^{k_1}, a_2, \dots, a_{r-1})$ — M-рег.

Пусть $a_r \cdot m = 0$ в $M/(a_1^{k_1}, \dots, a_{r-1})M$

т.е. $a_r \cdot m = a_1^{k_1} \cdot c_1 + \dots + a_{r-1} c_{r-1}$, $c_i \in M$

Тогда $a_r \cdot m = 0$ в $M/(a_1^{k_1-1}, \dots, a_{r-1})M$

отсюда $m = a_1^{k_1-1} n_1 + \dots + a_{r-1} n_{r-1}$

Тогда $a_1^{k_1} \cdot c_1 + \dots + a_{r-1} c_{r-1} =$

$= a_r (a_1^{k_1-1} n_1 + \dots + a_{r-1} n_{r-1})$,

откуда $a_1 \cdot c_1 - a_r n_1 \in (a_1^{k_1-1}, \dots, a_{r-1})M$

по <u>2.4.1</u> Но тогда

$a_r n_1 \in (a_1, a_2, \dots, a_{r-1})$,

откуда $n_1 \in (a_1, \dots, a_{r-1})M$

и $m = a_1^{k_1-1} n_1 + \dots + a_{r-1} n_{r-1} \in$

$\in (a_1^{k_1}, \dots, a_{r-1})M$, как и нужно ∎

<u>Вспомним</u> теорему Крулля о пересечении.

<u>Def</u> A - комм кольцо, $I \subseteq A$ - ид., M - A-мод., тогда M - <u>отделимый в I-адической топологии</u>

$\Leftrightarrow \bigcap_{n \geq 0} I^n M = 0$

<u>Th 4.4</u> (Т. Крулля о пересечении)

Если A - нёт, $I \subseteq \mathrm{Jac}(A)$ и M - кон-пор. A-мод., то M - отделимый в I-адич. топ.

<u>Proof:</u>

$N = \bigcap_{n \geq 0} I^n M \Rightarrow N \cap I^k M = N \quad \forall k \geq 0.$

По л. Артина-Рисса топология на N, индуц-ая I-адич. топ. на M эквив-на I-адич. топ. на $N \Rightarrow IN = N$

По л. Накаямы т.к. $I \subseteq \mathrm{Jac}(A) \Rightarrow N = 0$ ∎

Def Пусть $a_1, \dots, a_n \in A$, $I = (a_1, \dots, a_n)$
тогда $(a_1, \dots, a_n)$ – M–квази-рег.
послед-ть $\Leftrightarrow$ $\forall f(x_1, \dots, x_n) \in$
$\in M \otimes_A A[x_1, \dots, x_n]$ – однор.
ст. s, если $f(a_1, \dots, a_n) \in I^{s+1}M$,
то $f \in IM \otimes_A A[x_1, \dots, x_n]$

NB Рассм. $\Psi : M \otimes_A A[x_1, \dots, x_n] \ni f$

$$\downarrow \qquad \overline{I^s M / I^{s+1} M \ni f(a_1, \dots, a_n)}$$

$$Gr_I(M) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n M / I^{n+1} M = M / IM \oplus \dots$$

Тогда Ψ – гом. град. A-мод.,
сюръективен.
$(a_1, \dots, a_n)$ – квази-рег. $\Leftrightarrow$
$\ker \Psi = IM \otimes_A A[x_1, \dots, x_n]$.

Лемма 4.5

Если $(a_1, \dots, a_n)$ – M–квази-рег.,
$c \in A$ и $\{m \mid c \cdot m \in IM\} = IM$,
то $\{m \mid c \cdot m \in I^s M\} = I^s M$
для всех $s > 0$.

Proof

Инд. по s. Пусть $c \cdot m \in I^s M \Rightarrow$
$m \in I^{s-1} M \Rightarrow \exists$ однор. многочлен

$F \in M \otimes A[x_1, \dots, x_n]$
ст. $S-1$ т. 2. $m = F(a)$.

Тогда $c \cdot m = c \cdot F(a) \in I^s M$
влечет, что все коэф. F
лежат в $(IM : c) = \{m \,/\, c \cdot m \in IM\}$
Тогда $m = F(a) \in I^s M$.

■

Th. 4.6

1) Если $a_1, \dots, a_n$ – M-рег., то она M-квазирег.

2) Если $M, M/a_1M, \dots, M/(a_1, \dots, a_{n-1})M$ отделимы в I-адич. топ. и $a_1, \dots, a_n$ – M-квази-рег., то она и M-рег.

NB] а) A – нёт, M – кон-пор, $I \subseteq Jac(A)$
б) A и M – градуированные и все a_i – ст. > 0. Тогда условие в 2) выполнено.

Proof. Инд. по n; при $n=1$ $\underset{I M}{\underset{\parallel}{a_1 M}} \neq M$ и $\underset{\{m \in M \,/\, a_1 \cdot m = 0\}}{\underset{\parallel}{(0 : a_1)}} = 0$.

] $\underset{c \cdot x^s}{\underset{\parallel}{f(x)}}$ – одноp. ст s, $f(a_1) \in I^{s+1} M$

$\Rightarrow c\, a_1^s \in I^{s+1} M = a_1^{s+1} M$

$\Rightarrow a_1^s (c - a_1 m) = 0 \Rightarrow c - a_1 m = 0.$

$\Rightarrow c \in I M$, как и нужно

Случай $n > 1$ – см. следующую лекцию