Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 12. Плетизм

Н. В. Цилевич

19 ноября 2021 г.

Плетизм

- $g = \sum_\alpha u_\alpha x^\alpha \in \Lambda \rightsquigarrow$ фиктивные переменные y_i:
  $E(t) = \prod_i (1 + y_i t) = \prod_\alpha (1 + x^\alpha t)^{u_\alpha}$.
- Плетизм $f[g] := f(y_1, y_2, \ldots)$ для любой $f \in \Lambda$.
- $g = \sum_i x^{\alpha_i} \implies f[g] = f(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots)$.

Плетизм

- $g = \sum\limits_{\alpha} u_\alpha x^\alpha \in \Lambda \rightsquigarrow$ фиктивные переменные y_i:
  $E(t) = \prod\limits_i (1 + y_i t) = \prod\limits_{\alpha} (1 + x^\alpha t)^{u_\alpha}$.
- Плетизм $f[g] := f(y_1, y_2, \ldots)$ для любой $f \in \Lambda$.
- $g = \sum\limits_i x^{\alpha_i} \implies f[g] = f(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots)$.

Простейшие свойства плетизма:

- $f \in \Lambda^m$, $g \in \Lambda^n \implies f[g] \in \Lambda^{mn}$;
- $f[e_1] = e_1[f] = f$;
- $\forall g \in \Lambda$ отображение $f \mapsto f[g]$ — эндоморфизм кольца Λ, т.е.
  - $(af + bh)[g] = af[g] + bh[g]$ для любых $a, b \in \mathbb{Q}$,
  - $(fh)[g] = f[g]h[g]$.

Лемма

$\boxed{f[p_n] = p_n[f]}$ *для любой* $f \in \Lambda$. *В частности,* $\boxed{p_m[p_n] = p_n[p_m] = p_{mn}}$.

Лемма

$\boxed{f[p_n] = p_n[f]}$ *для любой* $f \in \Lambda$. *В частности,* $\boxed{p_m[p_n] = p_n[p_m] = p_{mn}}$.

Доказательство. $P(-t) = (\ln E(t))' \implies$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(-t)^{n-1} = (\sum_\alpha u_\alpha \ln(1 + x^\alpha t))' = \sum_\alpha \frac{u_\alpha x^\alpha}{1+x^\alpha t} =$$

$$= \sum_\alpha u_\alpha x^\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{\alpha\cdot k}(-t)^k = \sum_{n=1}^{\infty}(-t)^{n-1} \cdot \sum_\alpha u_\alpha x^{\alpha\cdot n} \implies$$

$$p_n(y) = \sum_\alpha u_\alpha (x^\alpha)^n \implies p_n[f] = f[p_n] = f(x_1^n, x_2^n, \ldots).$$

Лемма

$\boxed{f[p_n] = p_n[f]}$ *для любой* $f \in \Lambda$*. В частности,* $\boxed{p_m[p_n] = p_n[p_m] = p_{mn}}$.

Доказательство. $P(-t) = (\ln E(t))' \implies$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n(-t)^{n-1} = (\sum_{\alpha} u_\alpha \ln(1 + x^\alpha t))' = \sum_{\alpha} \frac{u_\alpha x^\alpha}{1+x^\alpha t} =$$

$$= \sum_{\alpha} u_\alpha x^\alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{\alpha \cdot k}(-t)^k = \sum_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1} \cdot \sum_{\alpha} u_\alpha x^{\alpha \cdot n} \implies$$

$$p_n(y) = \sum_{\alpha} u_\alpha (x^\alpha)^n \implies p_n[f] = f[p_n] = f(x_1^n, x_2^n, \dots).$$

Следствие

$g \mapsto p_n[g]$ *— эндоморфизм* Λ *для любого* $n \geq 1$.

- ($\bigstar$) Плетизм ассоциативен. (Подсказка: доказать, что $p_k[f[g]] = (p_k[f])[g]$.)

- ($\bigstar$) Плетизм ассоциативен.
- Плетизм не коммутативен. **Пример:**
  - $(-1)[h_2] = -1$,
  - $h_2[-1] = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2)[-1] = \frac{1}{2}(p_1[-1]^2 + p_2[-1]) = \frac{1}{2}((-1)^2 - 1) = 0$.

- (★) Плетизм ассоциативен.
- Плетизм не коммутативен.

Пример. $h_n[-s_1] = \sum_{\lambda} \frac{p_\lambda[-s_1]}{z_\lambda} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (-s_1(x_1^{\lambda_i}, x_2^{\lambda_i}, \ldots)) =$
$= \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \cdot (-1)^{\ell(\lambda)} p_\lambda = (-1)^n e_n.$

- ($\bigstar$) Плетизм ассоциативен.
- Плетизм не коммутативен.

Пример. $h_n[-s_1] = \sum_{\lambda} \frac{p_\lambda[-s_1]}{z_\lambda} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (-s_1(x_1^{\lambda_i}, x_2^{\lambda_i}, \ldots)) =$
$= \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \cdot (-1)^{\ell(\lambda)} p_\lambda = (-1)^n e_n.$

Лемма

$\boxed{f[-g] = (-1)^n \omega(f)[g]}$ *для любой* $f \in \Lambda^n$.

- (★) Плетизм ассоциативен.
- Плетизм не коммутативен.

Пример. $h_n[-s_1] = \sum_\lambda \frac{p_\lambda[-s_1]}{z_\lambda} = \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (-s_1(x_1^{\lambda_i}, x_2^{\lambda_i}, \ldots)) =$
$= \sum_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \cdot (-1)^{\ell(\lambda)} p_\lambda = (-1)^n e_n.$

Лемма

$\boxed{f[-g] = (-1)^n \omega(f)[g]}$ *для любой* $f \in \Lambda^n$.

Доказательство. $p_k[-g] = -g[p_k] = -p_k[g] \implies$
$p_\lambda[-g] = (-1)^{\ell(\lambda)} p_\lambda[g] = (-1)^{|\lambda|} (\omega(p_\lambda))[g] \implies$ QED.

- (★) Плетизм ассоциативен.
- Плетизм не коммутативен.

Пример. $h_n[-s_1] = \sum\limits_{\lambda} \frac{p_\lambda[-s_1]}{z_\lambda} = \sum\limits_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \prod\limits_{i=1}^{\ell(\lambda)} (-s_1(x_1^{\lambda_i}, x_2^{\lambda_i}, \ldots)) =$
$= \sum\limits_{\lambda \vdash n} \frac{1}{z_\lambda} \cdot (-1)^{\ell(\lambda)} p_\lambda = (-1)^n e_n.$

Лемма

$\boxed{f[-g] = (-1)^n \omega(f)[g]}$ *для любой* $f \in \Lambda^n$.

- (★) $p_k[\omega f] = (-1)^{n(k+1)} \omega(p_k[f])$ для $f \in \Lambda^n$.
- (★) $\omega(f[g]) = \begin{cases} f[\omega(g)], & \deg g \text{ чётна}, \\ \omega(f)[\omega(g)], & \deg g \text{ нечётна}. \end{cases}$

- $\lambda \in \Pi_n$ — чётная $\iff$ все λ_i чётные.

Лемма

$$\boxed{\frac{1}{\prod_i (1 - x_i^2) \cdot \prod_{i<j} (1 - x_i x_j)} = \sum_{\mu\ -\ \text{четн.}} s_\mu(x)}.$$

- $\lambda \in \Pi_n$ — чётная $\iff$ все λ_i чётные.

Лемма

$$\boxed{\frac{1}{\prod\limits_i (1-x_i^2)\cdot\prod\limits_{i<j}(1-x_i x_j)} = \sum_{\mu\ -\ \text{четн.}} s_\mu(x)}.$$

Доказательство. Любая λ приводится к чётной μ удалением вертикальной полосы $\implies \Big(\sum\limits_{\mu\ \text{четн.}} s_\mu\Big)\cdot\Big(\sum\limits_{r=0}^{\infty} e_r\Big) = \sum\limits_{\lambda} s_\lambda =$

$= \frac{1}{\prod_i (1-x_i)\cdot\prod_{i<j}(1-x_i x_j)}$, а $\sum\limits_{r=0}^{\infty} e_r = \prod\limits_i (1+x_i)$.

- **Пример.** $h_n[h_2] = \sum_{\text{чётн. } \lambda \vdash 2n} s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} s_{2\mu}$.

- **Пример.** $h_n[h_2] = \sum_{\text{чётн. } \lambda \vdash 2n} s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} s_{2\mu}$.

  Доказательство: $h_2 = \sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j \implies \{y_i\} = \{x_i^2, x_i x_j\} \implies \sum_{n \geq 0} h_n[h_2] = H(1)[y] = \prod_i \frac{1}{1-y_i} = \prod_i \frac{1}{1-x_i^2} \cdot \prod_{i<j} \frac{1}{1-x_i x_j}$.

- **Пример.** $h_n[h_2] = \sum_{\text{чётн. } \lambda \vdash 2n} s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} s_{2\mu}$.

  Доказательство: $h_2 = \sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j \implies \{y_i\} = \{x_i^2, x_i x_j\} \implies$
  $$\sum_{n \geq 0} h_n[h_2] = H(1)[y] = \prod_i \frac{1}{1-y_i} = \prod_i \frac{1}{1-x_i^2} \cdot \prod_{i<j} \frac{1}{1-x_i x_j}.$$

- (★) $h_2[e_2] =?$
- (★) $\left(\sum_{n \geq 0} h_n\right)[e_1 + e_2] = \sum_\lambda s_\lambda$.

- **Пример.** $h_n[h_2] = \sum_{\text{чётн. } \lambda \vdash 2n} s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} s_{2\mu}$.

  Доказательство: $h_2 = \sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j \implies \{y_i\} = \{x_i^2, x_i x_j\} \implies$
  $\sum_{n \geq 0} h_n[h_2] = H(1)[y] = \prod_i \frac{1}{1-y_i} = \prod_i \frac{1}{1-x_i^2} \cdot \prod_{i<j} \frac{1}{1-x_i x_j}$.

- (★) $h_2[e_2] = ?$
- (★) $\left(\sum_{n \geq 0} h_n\right) [e_1 + e_2] = \sum_\lambda s_\lambda$.
- Открытая проблема: найти комбинаторное описание $\langle s_\lambda[s_\mu], s_\nu \rangle$, особенно (хотя бы) $\langle h_n[h_m], s_\nu \rangle$.

- **Пример.** $h_n[h_2] = \sum_{\text{чётн. } \lambda \vdash 2n} s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} s_{2\mu}$.

  Доказательство: $h_2 = \sum_i x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j \implies \{y_i\} = \{x_i^2, x_i x_j\} \implies$
  $\sum_{n \geq 0} h_n[h_2] = H(1)[y] = \prod_i \frac{1}{1-y_i} = \prod_i \frac{1}{1-x_i^2} \cdot \prod_{i<j} \frac{1}{1-x_i x_j}$.

- (★) $h_2[e_2] = ?$
- (★) $\left(\sum_{n \geq 0} h_n\right) [e_1 + e_2] = \sum_\lambda s_\lambda$.
- Открытая проблема: найти комбинаторное описание $\langle s_\lambda[s_\mu], s_\nu \rangle$, особенно (хотя бы) $\langle h_n[h_m], s_\nu \rangle$.
- Гипотеза Фулкса (1950): разность $h_n[h_m] - h_m[h_n]$ Шур-положительна при $m \leq n$.

- Перенесём плетизм с помощью ch на характеры:

$$\phi \star \psi := \mathsf{ch}^{-1}(\mathsf{ch}\,\phi[\mathsf{ch}\,\psi]).$$

- Какой операции на представлениях это соответствует?

- Перенесём плетизм с помощью ch на характеры:

$$\phi \star \psi := \mathrm{ch}^{-1}(\mathrm{ch}\,\phi[\mathrm{ch}\,\psi]).$$

- Какой операции на представлениях это соответствует?
- Сплетение $A \wr \mathfrak{S}_n$ конечной группы A с $\mathfrak{S}_n$:
  - $X := A \times \ldots \times A$ (n копий),
  - $\mathfrak{S}_n$ действует на X перестановками сомножителей: $g(a_1, \ldots, a_n) = (a_{g^{-1}(1)}, \ldots, a_{g^{-1}(n)})$.

  Тогда $G = A \wr \mathfrak{S}_n$ есть полупрямое произведение X и $\mathfrak{S}_n$:
  - как множество $G = X \times \mathfrak{S}_n$,
  - $(x, \sigma) \cdot (y, \tau) = (x \cdot \sigma(y), \sigma\tau)$.

  (Чему равна мощность G?)

Сплетения симметрических групп

- ($\star$) $n = km \implies \mathfrak{S}_k^m \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$. Тогда $\boxed{N(\mathfrak{S}_k^m) = \mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_m}$.

Сплетения симметрических групп

- ($\star$) $n = km \implies \mathfrak{S}_k^m \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$. Тогда $\boxed{N(\mathfrak{S}_k^m) = \mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_m}$.
- **Пример:** $\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_m = B_m$ — гипероктаэдральная группа.

Сплетения симметрических групп

- (★) $n = km \implies \mathfrak{S}_k^m \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$. Тогда $\boxed{N(\mathfrak{S}_k^m) = \mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_m}$.
- **Пример:** $\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_m = B_m$ — гипероктаэдральная группа.
- (★) Найти элемент $\mathfrak{S}_{12}$, соответствующий элементу $((12),(123),(1),(1);(1234)) \in \mathfrak{S}_3 \wr \mathfrak{S}_4$.

- Пусть U — представление $\mathfrak{S}_k$ с характером ϕ,
  V — представление $\mathfrak{S}_m$ с характером ψ.
- $\mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_m$ действует на $U^{\otimes m} \otimes V$:

  $$((g_1, \ldots, g_m), \sigma)(u_1 \otimes \ldots \otimes u_m \otimes v) = g_1 u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes g_m u_{\sigma^{-1}(m)} \otimes \sigma v.$$

  Обозначим это представление ρ.

- Пусть U — представление $\mathfrak{S}_k$ с характером ϕ, V — представление $\mathfrak{S}_m$ с характером ψ.
- $\mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_m$ действует на $U^{\otimes m} \otimes V$:

  $$((g_1, \ldots, g_m), \sigma)(u_1 \otimes \ldots \otimes u_m \otimes v) = g_1 u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes g_m u_{\sigma^{-1}(m)} \otimes \sigma v.$$

  Обозначим это представление ρ.

Теорема

$$\boxed{\phi \star \psi = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_n} \rho}.$$

- Пусть U — представление $\mathfrak{S}_k$ с характером ϕ, V — представление $\mathfrak{S}_m$ с характером ψ.
- $\mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_m$ действует на $U^{\otimes m} \otimes V$:

$$((g_1, \ldots, g_m), \sigma)(u_1 \otimes \ldots \otimes u_m \otimes v) = g_1 u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes g_m u_{\sigma^{-1}(m)} \otimes \sigma v.$$

Обозначим это представление ρ.

Теорема

$$\boxed{\phi \star \psi = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_k \wr \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_n} \rho}.$$

Следствие: Шур-позитивность $s_\lambda \star s_\mu$ (комбинаторного доказательства нет).

Пример

- $O_n := \{$полные паросочетания на $[2n]\}$.
- $\mathfrak{S}_{2n}$ (транзитивно) действует на O_n перестановками вершин $\rightsquigarrow$ представление ρ^n.

Как разложить ρ^n на неприводимые? Обозначим его характер ψ^n.

Пример

- $O_n := \{$полные паросочетания на $[2n]\}$.
- $\mathfrak{S}_{2n}$ (транзитивно) действует на O_n перестановками вершин $\rightsquigarrow$ представление ρ^n.

Как разложить ρ^n на неприводимые? Обозначим его характер ψ^n.

- Стабилизатор паросочетания $\{\{1,2\},\{3,4\},\dots,\{2n-1,2n\}\}$ есть $N(\mathfrak{S}_2^n) = \mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_n$.
- $\operatorname{ch}\psi^n = \operatorname{ch}\operatorname{id}_{\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{2n}} = (\operatorname{ch}\operatorname{id}_{\mathfrak{S}_n})[\operatorname{ch}\operatorname{id}_{\mathfrak{S}_2}] = h_n[h_2] = \sum_{\text{чётн. } \lambda \vdash 2n} s_\lambda \implies$ $\rho^n = \sum_{\text{чётн. } \lambda \vdash 2n} \pi^\lambda$.

Ещё пример

- Рассмотрим неприводимое представление $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ с характером $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ и ограничим его на $\mathfrak{S}_n \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Пусть ξ^λ — характер полученного представления $\mathfrak{S}_n$.
- Тогда $\langle \mathrm{ch}\, \xi^\lambda, s_\mu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu[h] \rangle$, где $h = h_0 + h_1 + \ldots$.

Ещё пример

- Рассмотрим неприводимое представление $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ с характером $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ и ограничим его на $\mathfrak{S}_n \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Пусть ξ^λ — характер полученного представления $\mathfrak{S}_n$.
- Тогда $\langle \mathrm{ch}\, \xi^\lambda, s_\mu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu[h] \rangle$, где $h = h_0 + h_1 + \ldots$.

Доказательство:

- С.ч. $w \in \mathfrak{S}_n$ равны $\theta_1, \ldots, \theta_n \implies \xi^\lambda(w) = s_\lambda(\theta_1, \ldots, \theta_n)$.

Ещё пример

- Рассмотрим неприводимое представление $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ с характером $s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ и ограничим его на $\mathfrak{S}_n \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Пусть ξ^λ — характер полученного представления $\mathfrak{S}_n$.
- Тогда $\langle \mathrm{ch}\, \xi^\lambda, s_\mu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu[h] \rangle$, где $h = h_0 + h_1 + \dots$.

Доказательство:

- С.ч. $w \in \mathfrak{S}_n$ равны $\theta_1, \dots, \theta_n \implies \xi^\lambda(w) = s_\lambda(\theta_1, \dots, \theta_n)$.
- С другой стороны, если цикловый тип w есть $\mu = (j^{m_j})$, то $\prod_{i=1}^{n} (1 - \theta_i q) = \prod_j (1 - q^j)^{m_j}$.

Ещё пример

- Рассмотрим неприводимое представление $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ с характером $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ и ограничим его на $\mathfrak{S}_n \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Пусть ξ^λ — характер полученного представления $\mathfrak{S}_n$.
- Тогда $\langle \mathrm{ch}\, \xi^\lambda, s_\mu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu[h] \rangle$, где $h = h_0 + h_1 + \ldots$.

Доказательство:

- С.ч. $w \in \mathfrak{S}_n$ равны $\theta_1, \ldots, \theta_n \implies \xi^\lambda(w) = s_\lambda(\theta_1, \ldots, \theta_n)$.
- С другой стороны, если цикловый тип w есть $\mu = (j^{m_j})$, то $\prod_{i=1}^{n}(1 - \theta_i q) = \prod_j (1 - q^j)^{m_j}$.
- Тождество Коши: $\sum_\lambda \xi^\lambda(w) s_\lambda(y) = \frac{1}{\prod_{i,j}\left(1 - y_i^j\right)^{m_j}}$.

Ещё пример

- Рассмотрим неприводимое представление $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ с характером $s_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ и ограничим его на $\mathfrak{S}_n \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. Пусть ξ^λ — характер полученного представления $\mathfrak{S}_n$.
- Тогда $\langle \mathrm{ch}\,\xi^\lambda, s_\mu\rangle = \langle s_\lambda, s_\mu[h]\rangle$, где $h = h_0 + h_1 + \dots$.

Доказательство:

- С.ч. $w \in \mathfrak{S}_n$ равны $\theta_1,\dots,\theta_n \implies \xi^\lambda(w) = s_\lambda(\theta_1,\dots,\theta_n)$.
- С другой стороны, если цикловый тип w есть $\mu = (j^{m_j})$, то $\prod_{i=1}^{n}(1-\theta_i q) = \prod_j (1-q^j)^{m_j}$.
- Тождество Коши: $\sum_\lambda \xi^\lambda(w)s_\lambda(y) = \frac{1}{\prod_{i,j}\left(1-y_i^j\right)^{m_j}}$.
- $\sum_\lambda \left(\mathrm{ch}\,\xi^\lambda\right)(x)s_\lambda(y) = \frac{1}{n!}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}\frac{1}{\prod_{i,j}\left(1-y_i^j\right)^{m_j}}\cdot p_{\rho(w)}(x) =$
  $= \frac{1}{n!}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} p_{\rho(w)}(x)p_{\rho(w)}[h](y) = \sum_{\mu\vdash n} s_\mu(x)s_\mu[h](y) \implies$ QED.

Ещё пример

- Рассмотрим неприводимое представление $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ с характером $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ и ограничим его на $\mathfrak{S}_n \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$. Пусть ξ^λ — характер полученного представления $\mathfrak{S}_n$.
- Тогда $\langle \mathrm{ch}\, \xi^\lambda, s_\mu \rangle = \langle s_\lambda, s_\mu[h] \rangle$, где $h = h_0 + h_1 + \ldots$.

Замечание. Пример с действием $\mathfrak{S}_n$ на $\Lambda^k V$ соответствует случаю $\lambda = (1^k)$, а с действием $\mathfrak{S}_n$ на $S(V^*)$ — случаю $\lambda = (k)$.