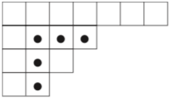
Теория представлений симметрических групп

Лекция 12. Формула крюков. Двойственность Шура–Вейля

Н. В. Цилевич

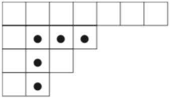
19 ноября 2021 г.

Длина крюка диаграммы Юнга λ в клетке $\square = (i, j)$:
$h(\square) = (\lambda_i - j) + (\lambda'_j - i) + 1 =$



Формула крюков

Длина крюка диаграммы Юнга λ в клетке $\square = (i, j)$:
$h(\square) = (\lambda_i - j) + (\lambda'_j - i) + 1 =$



Теорема (формула крюков)

$$\boxed{\dim \pi_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{\square \in \lambda} h(\square)}}.$$

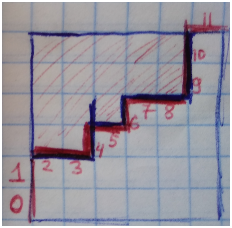
Лемма

Пусть $\lambda_1 \le m$ *и* $\lambda'_1 \le n$*. Тогда* $m+n$ *чисел*
$\{\lambda_i + n - i\}_{i=1}^{n}$ *и* $\{n - 1 + j - \lambda'_j\}_{j=1}^{m}$
образуют перестановку множества $\{0, 1, \ldots, m+n-1\}$*.*

Лемма

Пусть $\lambda_1 \leq m$ *и* $\lambda'_1 \leq n$. *Тогда* $m+n$ *чисел*
$\{\lambda_i + n - i\}_{i=1}^{n}$ *и* $\{n - 1 + j - \lambda'_j\}_{j=1}^{m}$
образуют перестановку множества $\{0, 1, \dots, m+n-1\}$.

Доказательство:



Пример: $\lambda = (5^2 32)$, $m = 6$, $n = 6$.

Вертикальные рёбра: $\lambda_i + n - i$.

Горизонтальные рёбра:
$(m + n - 1) - (\lambda'_j + m - j) = n - 1 + j - \lambda'_j$.

Доказательство теоремы

- $\dim \pi_\lambda = \chi^\lambda(1^n) = [x^{\lambda+\delta}]\,(\Delta(x)(x_1 + \ldots + x_N)^n)$.
- $\Delta(x) = \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \prod x_j^{N-\sigma(j)}$ и

  $(p_1(x))^n = \sum\limits_{m_1+\ldots+m_N=n} \binom{n}{m_1,\ldots,m_N} \prod x_i^{m_i} \implies$

  $\dim \pi_\lambda = [x^{\lambda+\delta}] \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \sum\limits_{m_1+\ldots+m_N=n} \binom{n}{m_1,\ldots,m_N} \prod x_j^{N-\sigma(j)+m_j}$.

Доказательство теоремы

- $\Delta(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \prod x_j^{N-\sigma(j)}$ и
  $(p_1(x))^n = \sum_{m_1+\ldots+m_N=n} \binom{n}{m_1,\ldots,m_N} \prod x_i^{m_i} \implies$
  $\dim \pi_\lambda = [x^{\lambda+\delta}] \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \sum_{m_1+\ldots+m_N=n} \binom{n}{m_1,\ldots,m_N} \prod x_j^{N-\sigma(j)+m_j}$.
- $d_i := \lambda_i + N - i$. Надо: $N - \sigma(j) + m_j = d_j \iff m_j = d_j - N + \sigma(j)$.

Доказательство теоремы

- $\Delta(x) = \sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \prod x_j^{N-\sigma(j)}$ и
  $(p_1(x))^n = \sum\limits_{m_1+\ldots+m_N=n} \binom{n}{m_1,\ldots,m_N} \prod x_i^{m_i} \implies$
  $\dim \pi_\lambda = [x^{\lambda+\delta}] \sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \sum\limits_{m_1+\ldots+m_N=n} \binom{n}{m_1,\ldots,m_N} \prod x_j^{N-\sigma(j)+m_j}$.
- $d_i := \lambda_i + N - i$. Надо: $N - \sigma(j) + m_j = d_j \iff m_j = d_j - N + \sigma(j)$.
- $\dim \pi_\lambda = \sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \frac{n!}{\prod\limits_j (d_j - N + \sigma(j))!} =$
  $= \frac{n!}{\prod d_j!} \sum\limits_{\sigma\in\mathfrak{S}_N} (-1)^\sigma \prod\limits_j d_j(d_j-1)\ldots(d_j - N + \sigma(j) + 1) =$
  $= \frac{n!}{\prod d_j!} \det\left[d_j(d_j-1)\ldots(d_j - N + i + 1)\right]_{i,j=1}^N$,
  где при $i = N$ считаем, что элемент равен 1.

Продолжение доказательства

- Столбцовые преобразования $\implies$

$$\dim \pi_\lambda = \frac{n!}{\prod d_j!} \det(d_j^{N-i})_{i,j=1}^N = \frac{n!}{\prod d_j!} \prod_{1 \le i < j \le N} (d_i - d_j).$$

- Надо: $\frac{n!}{\prod d_j!} \prod\limits_{1 \le i < j \le N} (d_i - d_j) = \frac{n!}{\prod\limits_{\square \in \lambda} h(\square)}$.

Продолжение доказательства

- Столбцовые преобразования $\implies$

$$\dim \pi_\lambda = \frac{n!}{\prod d_j!} \det(d_j^{N-i})_{i,j=1}^N = \frac{n!}{\prod d_j!} \prod_{1 \le i < j \le N} (d_i - d_j).$$

- Надо: $\frac{n!}{\prod d_j!} \prod\limits_{1 \le i < j \le N} (d_i - d_j) = \frac{n!}{\prod_{\square \in \lambda} h(\square)}$.
- Достаточно для 1-й строки: $d_1! = \prod\limits_{j>1} (d_1 - d_j) \prod\limits_{\square \in \lambda_1} h(\square)$. Далее индукция.
  - $\prod\limits_{j>1} (d_1 - d_j) = \prod\limits_j (\lambda_1 - \lambda_j + j - 1)$.
  - $\prod\limits_{\square \in \lambda_1} h(\square) = \prod\limits_{j=1}^{\lambda_1} (\lambda'_j + \lambda_1 - j)$.
- Лемма с λ' вместо λ и $m = N$, $n = \lambda_1$ даёт в точности нужное.

Теорема (формула крюков)

$$\boxed{\dim \pi_\lambda = \frac{n!}{\prod\limits_{\square\in\lambda} h(\square)}}.$$

Пример. $\lambda = (4,3,1^2) \vdash 9 \implies \dim \pi_\lambda = \frac{9!}{7\cdot4\cdot3\cdot1\cdot5\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = 216.$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
7 & 4 & 3 & 1 \\
\hline
5 & 2 & 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-3}
2 & \multicolumn{3}{c}{} \\
\cline{1-1}
1 & \multicolumn{3}{c}{} \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

Алгебры Ли

Определение

Алгебра Ли – векторное пространство $\mathfrak{g}$ над полем k с билинейным отображением $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющим условиям:

- $[a, b] = -[b, a]$ *(кососимметричность);*
- $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ *(тождество Якоби).*

Алгебры Ли

Определение

Алгебра Ли – *векторное пространство* $\mathfrak{g}$ *над полем* k *с билинейным отображением* $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, *удовлетворяющим условиям:*

- $[a, b] = -[b, a]$ *(кососимметричность);*
- $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ *(тождество Якоби).*

Пример. Пусть V – векторное пространство.

- Полная линейная алгебра $\mathfrak{gl}(V)$: пространство $\mathrm{End}(V)$ со скобкой $[a, b] = ab - ba$.
- Это алгебра Ли группы Ли $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных операторов в V.

Алгебры Ли

Определение

Алгебра Ли – векторное пространство $\mathfrak{g}$ над полем k с билинейным отображением $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющим условиям:

- $[a, b] = -[b, a]$ *(кососимметричность);*
- $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$ *(тождество Якоби).*

Пример. Пусть V – векторное пространство.

- Полная линейная алгебра $\mathfrak{gl}(V)$: пространство $\operatorname{End}(V)$ со скобкой $[a, b] = ab - ba$.
- Это алгебра Ли группы Ли $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных операторов в V.

В частности, при $V = \mathbb{C}^n$ получаем полную линейную алгебру $\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ матриц размера $n \times n$. Это алгебра Ли полной линейной группы $\mathrm{GL}(n)$ обратимых матриц размера $n \times n$.

Представления алгебр Ли

- Гомоморфизм алгебр Ли $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ – линейное отображение, удовлетворяющее условию $\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)]$, $a, b \in \mathfrak{g}_1$.
- Представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве V – гомоморфизм алгебр Ли $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$.
- Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли с базисом $\{x_i\}$ и $[x_i, x_j] = \sum\limits_k c_{ij}^k x_k$. Тогда универсальная обёртывающая алгебра $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ – ассоциативная алгебра, порождённая x_i с определяющими соотношениями $x_i x_j - x_j x_i = \sum\limits_k c_{ij}^k x_k$.
- Представления алгебры Ли $\leftrightarrow$ представления её универсальной обёртывающей алгебры!

Двойственность Шура–Вейля для $\mathfrak{gl}(V)$

V – конечномерное векторное пространство.

- Рассмотрим пространство $E := V^{\otimes n}$.
- Естественное действие $\mathfrak{S}_n$ на E перестановками координат:

$$\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

Двойственность Шура–Вейля для $\mathfrak{gl}(V)$

V – конечномерное векторное пространство.

- Рассмотрим пространство $E := V^{\otimes n}$.
- Естественное действие $\mathfrak{S}_n$ на E перестановками координат:

$$\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

- Естественное действие $\mathrm{GL}(V)$ на E:

$$g(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = gv_1 \otimes \ldots \otimes gv_n, \quad g \in \mathrm{GL}(V).$$

- Естественное действие $\mathfrak{gl}(V)$ на E:

$$a(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = av_1 \otimes \ldots \otimes v_n + v_1 \otimes av_2 \otimes \ldots \otimes v_n + \ldots + v_1 \otimes \ldots \otimes av_n.$$

- Действия $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{gl}(V)$ (или $\mathrm{GL}(V)$), очевидно, коммутируют.

Двойственность Шура–Вейля для $\mathfrak{gl}(V)$

V – конечномерное векторное пространство.

- Рассмотрим пространство $E := V^{\otimes n}$.
- Естественное действие $\mathfrak{S}_n$ на E перестановками координат:

$$\sigma(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

- Естественное действие $\mathrm{GL}(V)$ на E:

$$g(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = gv_1 \otimes \ldots \otimes gv_n, \quad g \in \mathrm{GL}(V).$$

- Естественное действие $\mathfrak{gl}(V)$ на E:

$$a(v_1 \otimes \ldots \otimes v_n) = av_1 \otimes \ldots \otimes v_n + v_1 \otimes av_2 \otimes \ldots \otimes v_n + \ldots + v_1 \otimes \ldots \otimes av_n.$$

- Действия $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{gl}(V)$ (или $\mathrm{GL}(V)$), очевидно, коммутируют.

Теорема

Пусть A – образ $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ в $\mathrm{End}(E)$ и $B = A'$.
Тогда B – образ $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(V))$ в $\mathrm{End}(E)$.

Напоминание

- n-я симметрическая степень $\mathrm{Sym}^n(V)$ векторного пр-ва V $=$ фактор $V^{\otimes n}$ по подпр-ву, натянутому на все элементы вида $T - \sigma(T)$, $T \in V^{\otimes n}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Напоминание

- n-я симметрическая степень $\mathrm{Sym}^n(V)$ векторного пр-ва V $=$ фактор $V^{\otimes n}$ по подпр-ву, натянутому на все элементы вида $T - \sigma(T)$, $T \in V^{\otimes n}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
- A – конечномерная алгебра $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Sym}^n(A)$.

Напоминание

- n-я симметрическая степень $\mathrm{Sym}^n(V)$ векторного пр-ва V $=$ фактор $V^{\otimes n}$ по подпр-ву, натянутому на все элементы вида $T - \sigma(T)$, $T \in V^{\otimes n}$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
- A – конечномерная алгебра $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Sym}^n(A)$.
- ($\bigstar$) $\mathrm{Sym}^n(A) \simeq (A^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$. (Набросок доказательства:
  - $\Psi : (A^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \to \mathrm{Sym}^n(A)$ – естественная проекция на фактор;
  - $\Phi : \mathrm{Sym}^n(A) \to (A^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$ – по формуле $\Phi(b) = \frac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma(b)$.
  - Проверить корректность и взаимную обратность.)

Лемма

Пусть V – конечномерное в.п., A – конечномерная алгебра.

1. $\mathrm{Sym}^n(V)$ *порождается элементами вида* $v^{\otimes n} = v \otimes \ldots \otimes v$, $v \in V$.
2. $\mathrm{Sym}^n(A)$ *порождается элементами вида* $\Delta_n(a)$, $a \in A$, *где* $\Delta_n(a) = a \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes a$.

Лемма

Пусть V – конечномерное в.п., A – конечномерная алгебра.

1. $\mathrm{Sym}^n(V)$ *порождается элементами вида* $v^{\otimes n} = v \otimes \ldots \otimes v$, $v \in V$.
2. $\mathrm{Sym}^n(A)$ *порождается элементами вида* $\Delta_n(a)$, $a \in A$, *где* $\Delta_n(a) = a \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes a$.

Доказательство.

- Пусть $W \subset U$ и $v_0, \ldots, v_d \in U$. Пусть $f(t) := \sum_{i=0}^{d} v_i t^i \in W$ для любого $t \in \mathbb{C}$. Тогда $v_0, \ldots v_d \in W$.

Лемма

Пусть V – конечномерное в.п., A – конечномерная алгебра.

1. $\mathrm{Sym}^n(V)$ *порождается элементами вида* $v^{\otimes n} = v \otimes \ldots \otimes v$, $v \in V$.
2. $\mathrm{Sym}^n(A)$ *порождается элементами вида* $\Delta_n(a)$, $a \in A$, *где* $\Delta_n(a) = a \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes a$.

Доказательство.

- Пусть $W \subset U$ и $v_0, \ldots, v_d \in U$. Пусть $f(t) := \sum_{i=0}^{d} v_i t^i \in W$ для любого $t \in \mathbb{C}$. Тогда $v_0, \ldots v_d \in W$.

  Доказательство: индукция по d.

  - База $d = 0$ очевидна.
  - Переход. $v_0 = f(0) \in W \implies$ для любого $t \neq 0$ $W \ni \frac{f(t)-f(0)}{t} = \sum_{i=1}^{d} v_i t^{i-1}$. Интерполяция Лагранжа $\implies$ для $t = 0$ тоже $\implies$ OK по предположению индукции.

Докажем, что $\mathrm{Sym}^n(V)$ порождается элементами вида $v^{\otimes n} = v \otimes \ldots \otimes v$, $v \in V$.

- Пусть $W \subset \mathrm{Sym}^n(V)$ порождено $v \otimes \ldots \otimes v$.
  Пусть $\{v_1, \ldots, v_d\}$ – базис V.
  Тогда для любых $\{t_i\}$

$$W \ni (\sum_{i=1}^{d} t_i v_i)^{\otimes n} = \sum_{\sum m_i = n} \binom{n}{m_1, \ldots, m_d} \prod_{i=1}^{d} t_i^{m_i} v_i^{\otimes m_i}.$$

  Последовательно применим предыдущее утверждение к каждой t_i $\Longrightarrow$ QED.

Докажем, что $\mathrm{Sym}^n(A)$ порождается элементами вида $\Delta_n(a)$, $a \in A$, где $\Delta_n(a) = a \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes a$.

- $\exists P \in \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_n]$: $x_1 \ldots x_n = P(p_1(x), \ldots, p_n(x))$.
  - $e_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_k \text{ разл.}} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$.
  - Следует из тождеств Ньютона: $ke_k = \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i} p_i$.

    Доказательство: $\prod\limits_{i=1}^{k} (t - x_i) = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} e_{k-i}(x_1, \ldots, x_k) t^i \implies$

    $0 = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} e_{k-i}(x_1, \ldots, x_k) x_j^i \implies$ QED для $n = k$ суммированием по j. Однородные многочлены степени $k \implies$ и для любого n.

Докажем, что $\mathrm{Sym}^n(A)$ порождается элементами вида $\Delta_n(a)$, $a \in A$, где $\Delta_n(a) = a \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes a$.

- $\exists P \in \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_n]$: $x_1 \ldots x_n = P(p_1(x), \ldots, p_n(x))$.
  - $e_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_k \text{ разл.}} x_{i_1} \ldots x_{i_k}$.
  - Следует из тождеств Ньютона: $ke_k = \sum\limits_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i} p_i$.

    Доказательство: $\prod\limits_{i=1}^{k} (t - x_i) = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} e_{k-i}(x_1, \ldots, x_k) t^i \implies$

    $0 = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} e_{k-i}(x_1, \ldots, x_k) x_j^i \implies$ QED для $n = k$ суммированием по j. Однородные многочлены степени $k \implies$ и для любого n.
- Тогда $P(\Delta_n(a), \Delta_n(a^2), \ldots, \Delta_n(a^n)) = a^{\otimes n} \implies$ QED.

Лемма доказана.

Теорема

Пусть A – образ $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ в $\mathrm{End}(E)$ и $B = A'$. Тогда B – образ $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(V))$ в $\mathrm{End}(E)$.

Доказательство.

- Действия $\mathfrak{S}_n$ и $\mathfrak{gl}(V)$ коммутируют $\implies$ образ $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(V))$ содержится в B.
- Обратно: $B = (\mathrm{End}(V)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} = \mathrm{Sym}^n(\mathrm{End}(V)) \implies$ QED по лемме.

Напоминание

Теорема (теорема о двойном централизаторе)

E – конечномерное векторное пространство,
A, B – подалгебры в $\mathrm{End}(E)$, A полупроста, $B = A'$.
Тогда

(1) *$A = B'$ (т.е. $A'' = A$);*

(2) *B полупроста;*

(3) *как представление $A \otimes B$ имеем $E = \bigoplus_{i \in I} V_i \otimes W_i$, где V_i – все неприводимые представления A, а W_i – все неприводимые представления B. (В частности, между ними существует естественная биекция.)*

Теорема (двойственность Шура–Вейля для $\mathfrak{gl}(V)$)

1. *Образ A алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ и образ B алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{gl}(n))$ в $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ – взаимные централизаторы.*
2. *Обе эти алгебры полупросты.*
3. *Имеет место разложение $(A \otimes B)$-представлений*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda \otimes L_\lambda,$$

где V_λ – неприводимые представления $\mathfrak{S}_n$, а L_λ – различные неприводимые представления $\mathfrak{gl}(V)$ или нули.

Доказательство. A полупроста по теореме Машке $\implies$ применима теорема о двойном централизаторе $\implies$ QED по предыдущей теореме.