Спецкурс «Симметрические функции»

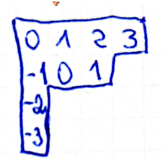
Лекция 13. Специализации функций Шура. Приложения к перечислению плоских разбиений

Н. В. Цилевич

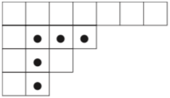
26 ноября 2021 г.

Содержания и длины крюков

- Содержание клетки $\square = (i, j)$ диаграммы: $c(\square) = j - i$.



- Длина крюка диаграммы Юнга λ в клетке $\square = (i, j)$:
$h(\square) = (\lambda_i - j) + (\lambda'_j - i) + 1$.



7	4	3	1
5	2	1	
2			
1			

- $b(\lambda) := \sum_i (i-1)\lambda_i \overset{(\bigstar)}{=} \sum_i \binom{\lambda'_i}{2}$.

- $b(\lambda) := \sum_i (i-1)\lambda_i \stackrel{(\star)}{=} \sum_i \binom{\lambda'_i}{2}$.
- $(\star)$ $\sum_{\square\in\lambda} c(\square) = b(\lambda') - b(\lambda)$.
- $(\star)$ $\sum_{\square\in\lambda} h(\square) = b(\lambda) + b(\lambda') + |\lambda|$.

- $b(\lambda) := \sum_i (i-1)\lambda_i \overset{(\bigstar)}{=} \sum_i \binom{\lambda'_i}{2}$.
- $(\bigstar)$ $\sum_{\square\in\lambda} c(\square) = b(\lambda') - b(\lambda)$.
- $(\bigstar)$ $\sum_{\square\in\lambda} h(\square) = b(\lambda) + b(\lambda') + |\lambda|$.

Цель — специализации функций Шура.

- $b(\lambda) := \sum_i (i-1)\lambda_i \overset{(\star)}{=} \sum_i \binom{\lambda_i'}{2}$.
- $(\star)$ $\sum_{\square\in\lambda} c(\square) = b(\lambda') - b(\lambda)$.
- $(\star)$ $\sum_{\square\in\lambda} h(\square) = b(\lambda) + b(\lambda') + |\lambda|$.

Цель — специализации функций Шура.

Напоминание: главная специализация (порядка n) $\mathrm{ps}_n \colon \Lambda \to \mathbb{Q}[q]$, $\mathrm{ps}_n(f) = f(1, q, q^2, \ldots, q^{n-1})$.

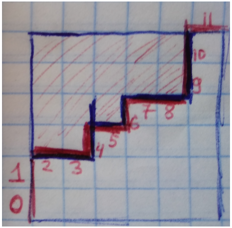
Лемма

Пусть $\lambda_1 \leq m$ *и* $\lambda_1' \leq n$*. Тогда* $m+n$ *чисел*
$\{\lambda_i + n - i\}_{i=1}^{n}$ *и* $\{n - 1 + j - \lambda_j'\}_{j=1}^{m}$
образуют перестановку множества $\{0, 1, \ldots, m+n-1\}$*.*

Лемма

Пусть $\lambda_1 \le m$ *и* $\lambda'_1 \le n$*. Тогда* $m+n$ *чисел*
$\{\lambda_i + n - i\}_{i=1}^{n}$ *и* $\{n - 1 + j - \lambda'_j\}_{j=1}^{m}$
образуют перестановку множества $\{0, 1, \ldots, m+n-1\}$.

Доказательство:



Пример: $\lambda = (5^2 32)$, $m = 6$, $n = 6$.

Вертикальные рёбра: $\lambda_i + n - i$.

Горизонтальные рёбра:
$(m+n-1) - (\lambda'_j + m - j) = n - 1 + j - \lambda'_j$.

- Лемма для λ' с $m = \lambda_1 \implies$
$$\sum_{j=1}^{\lambda_1} q^{\lambda'_j+\lambda_1-j} + \sum_{j=1}^{n} q^{\lambda_1-1+j-\lambda_j} = \sum_{j=0}^{\lambda_1+n-1} q^j.$$

- Лемма для λ' с $m = \lambda_1 \implies$
$$\sum_{j=1}^{\lambda_1} q^{\lambda'_j+\lambda_1-j} + \sum_{j=1}^{n} q^{\lambda_1-1+j-\lambda_j} = \sum_{j=0}^{\lambda_1+n-1} q^j.$$
- $d_i := \lambda_i + n - i \implies \sum_{j=1}^{\lambda_1} q^{h(1,j)} + \sum_{j=2}^{n} q^{d_1-d_j} = \sum_{j=1}^{d_1} q^j.$

- Лемма для λ' с $m = \lambda_1 \implies$
$\sum_{j=1}^{\lambda_1} q^{\lambda'_j+\lambda_1-j} + \sum_{j=1}^{n} q^{\lambda_1-1+j-\lambda_j} = \sum_{j=0}^{\lambda_1+n-1} q^j.$
- $d_i := \lambda_i + n - i \implies \sum_{j=1}^{\lambda_1} q^{h(1,j)} + \sum_{j=2}^{n} q^{d_1-d_j} = \sum_{j=1}^{d_1} q^j.$
- Индукция по строкам $\implies \sum_{\square\in\lambda} q^{h(\square)} + \sum_{i<j} q^{d_i-d_j} = \sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{d_i} q^j.$

- Лемма для λ' с $m = \lambda_1 \implies$ $\sum_{j=1}^{\lambda_1} q^{\lambda'_j+\lambda_1-j} + \sum_{j=1}^{n} q^{\lambda_1-1+j-\lambda_j} = \sum_{j=0}^{\lambda_1+n-1} q^j.$
- $d_i := \lambda_i + n - i \implies \sum_{j=1}^{\lambda_1} q^{h(1,j)} + \sum_{j=2}^{n} q^{d_1-d_j} = \sum_{j=1}^{d_1} q^j.$
- Индукция по строкам $\implies \sum_{\square\in\lambda} q^{h(\square)} + \sum_{i<j} q^{d_i-d_j} = \sum_{i\geq 1}\sum_{j=1}^{d_i} q^j.$
- $\implies \prod_{\square\in\lambda}(1-q^{h(\square)}) = \frac{\prod_{i\geq 1}\prod_{j=1}^{d_i}(1-q^j)}{\prod_{i<j}(1-q^{d_i-d_j})}.$

Главная специализация функций Шура

Предложение (формула содержаний и крюков)

$$\boxed{\mathrm{ps}_n(s_\lambda) = s_\lambda(1, q, \ldots, q^{n-1}) = q^{b(\lambda)} \cdot \prod_{\square\in\lambda} \frac{1 - q^{n+c(\square)}}{1 - q^{h(\square)}}} \quad \textit{при } n \geq \ell(\lambda).$$

Главная специализация функций Шура

Предложение (формула содержаний и крюков)

$$\boxed{\mathrm{ps}_n(s_\lambda) = s_\lambda(1, q, \ldots, q^{n-1}) = q^{b(\lambda)} \cdot \prod_{\square \in \lambda} \frac{1 - q^{n+c(\square)}}{1 - q^{h(\square)}}}$$ *при* $n \geq \ell(\lambda)$.

Доказательство.

- $a_{\lambda+\delta}(1, q, \ldots, q^{n-1}) = \det(q^{(i-1)(\lambda_j+n-j)})_{i,j=1}^n = \mathrm{Vand}(q^{\lambda_j+n-j}) =$
  $= \prod_{i<j}(q^{\lambda_j+n-j} - q^{\lambda_i+n-i}) = q^{b(\lambda)+b(\delta)} \prod_{i<j}(1 - q^{\lambda_i-\lambda_j-i+j}) =$
  $= q^{b(\lambda)+b(\delta)} \cdot \frac{\prod_{i\geq 1}[(1-q)\ldots(1-q^{\lambda_i-n+i})]}{\prod_{\square\in\lambda}(1-q^{h(\square)})} = q^{b(\lambda)+b(\delta)} \cdot \frac{\prod_{i\geq 1}[d_i]!}{\prod_{\square\in\lambda}(1-q^{h(\square)})}$, где
  $[r]! := (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^r)$.

Продолжение доказательства

- В i-й строке $\{n+c(\square)\} = \{n-i+1,\dots,n-i+\lambda_i\} \implies$
$\prod\limits_{\square\in\lambda}(1-q^{n+c(\square)}) = \prod\limits_i \frac{[d_i]!}{[n-i]!} \implies$
$a_{\lambda+\delta}(1,q,\dots,q^{n-1}) = q^{b(\lambda)+b(\delta)} \prod\limits_i [n-i]! \prod\limits_{\square\in\lambda} \frac{1-q^{n+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}}.$

Продолжение доказательства

- В i-й строке $\{n+c(\square)\} = \{n-i+1, \dots, n-i+\lambda_i\} \implies \prod_{\square\in\lambda}(1-q^{n+c(\square)}) = \prod_i \frac{[d_i]!}{[n-i]!} \implies a_{\lambda+\delta}(1,q,\dots,q^{n-1}) = q^{b(\lambda)+b(\delta)}\prod_i [n-i]! \prod_{\square\in\lambda}\frac{1-q^{n+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}}$.
- $a_\delta(1,q,\dots,q^{n-1}) = q^{b(\delta)}\prod_{i<j}(1-q^{j-i}) = q^{b(\delta)}\prod_i [n-i]!$.

Продолжение доказательства

- В i-й строке $\{n+c(\square)\} = \{n-i+1, \ldots, n-i+\lambda_i\} \implies \prod_{\square\in\lambda}(1-q^{n+c(\square)}) = \prod_i \frac{[d_i]!}{[n-i]!} \implies$
$a_{\lambda+\delta}(1, q, \ldots, q^{n-1}) = q^{b(\lambda)+b(\delta)} \prod_i [n-i]! \prod_{\square\in\lambda} \frac{1-q^{n+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}}.$
- $a_\delta(1, q, \ldots, q^{n-1}) = q^{b(\delta)} \prod_{i<j}(1-q^{j-i}) = q^{b(\delta)} \prod_i [n-i]!.$
- Тогда $\mathrm{ps}_n\, s_\lambda = \mathrm{ps}_n \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = q^{b(\lambda)} \cdot \prod_{\square\in\lambda} \frac{1-q^{n+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}} \implies$ QED.

Продолжение доказательства

- В i-й строке $\{n+c(\square)\} = \{n-i+1,\dots,n-i+\lambda_i\} \implies$
$\prod\limits_{\square\in\lambda}(1-q^{n+c(\square)}) = \prod\limits_i \frac{[d_i]!}{[n-i]!} \implies$
$a_{\lambda+\delta}(1,q,\dots,q^{n-1}) = q^{b(\lambda)+b(\delta)} \prod\limits_i [n-i]! \prod\limits_{\square\in\lambda} \frac{1-q^{n+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}}$.
- $a_\delta(1,q,\dots,q^{n-1}) = q^{b(\delta)} \prod\limits_{i<j}(1-q^{j-i}) = q^{b(\delta)} \prod\limits_i [n-i]!$.
- Тогда $\mathrm{ps}_n\, s_\lambda = \mathrm{ps}_n \frac{a_{\lambda+\delta}}{a_\delta} = q^{b(\lambda)} \cdot \prod\limits_{\square\in\lambda} \frac{1-q^{n+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}} \implies$ QED.

($\bigstar$) Степень $\mathrm{ps}_n(s_\lambda)$ как многочлена от q?

Итак, $\mathrm{ps}_n(s_\lambda) = q^{b(\lambda)} \cdot \prod_{\square\in\lambda} \frac{1-q^{n+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}}$.

Следствие

$\boxed{\mathrm{ps}(s_\lambda) = \dfrac{q^{b(\lambda)}}{\prod_{\square\in\lambda}(1-q^{h(\square)})}}$, $\boxed{\mathrm{ps}_n^1(s_\lambda) = \prod_{\square\in\lambda} \dfrac{n+c(\square)}{h(\square)}}$,

$\boxed{\mathrm{ex}_1(s_\lambda) = \prod_{\square\in\lambda} \dfrac{1}{h(\square)}}$.

Итак, $\mathrm{ps}_n(s_\lambda) = q^{b(\lambda)} \cdot \prod_{\square\in\lambda} \frac{1-q^{n+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}}$.

Следствие

$$\boxed{\mathrm{ps}(s_\lambda) = \frac{q^{b(\lambda)}}{\prod_{\square\in\lambda}\left(1-q^{h(\square)}\right)}}, \quad \boxed{\mathrm{ps}^1_n(s_\lambda) = \prod_{\square\in\lambda} \frac{n+c(\square)}{h(\square)}},$$

$$\boxed{\mathrm{ex}_1(s_\lambda) = \prod_{\square\in\lambda} \frac{1}{h(\square)}}.$$

Доказательство.

- В предыдущей формуле $n \to \infty$.
- В предыдущей формуле $q = 1$.
- ex_1 получается так: положим $x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{n}$, $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0$ и устремим $n \to \infty \implies$ $\mathrm{ex}_1(s_\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{|\lambda|}} \cdot \prod_{\square\in\lambda} \frac{n+c(\square)}{h(\square)} = \prod_{\square\in\lambda} \frac{1}{h(\square)}$.

Формула крюков

Теорема (формула крюков)

$$\boxed{\dim \pi_\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod\limits_{\Box \in \lambda} h(\Box)}}.$$

Формула крюков

Теорема (формула крюков)

$$\boxed{\dim \pi_\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod\limits_{\square\in\lambda} h(\square)}}.$$

Доказательство.

- Было: $\mathrm{ex}(s_\lambda) = \dim\lambda \cdot \frac{u^{|\lambda|}}{|\lambda|!} \implies \mathrm{ex}_1(s_\lambda) = \frac{\dim\lambda}{|\lambda|!}$.
- Теперь доказали: $\mathrm{ex}_1(s_\lambda) = \prod\limits_{\square\in\lambda} \frac{1}{h(\square)}$.

Формула крюков

Теорема (формула крюков)

$$\boxed{\dim \pi_\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod\limits_{\square\in\lambda} h(\square)}}.$$

Доказательство.

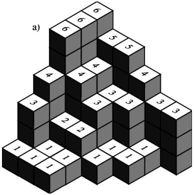
- Было: $\mathrm{ex}(s_\lambda) = \dim\lambda \cdot \frac{u^{|\lambda|}}{|\lambda|!} \implies \mathrm{ex}_1(s_\lambda) = \frac{\dim\lambda}{|\lambda|!}$.
- Теперь доказали: $\mathrm{ex}_1(s_\lambda) = \prod\limits_{\square\in\lambda} \frac{1}{h(\square)}$.

Пример. $\lambda = (4, 3, 1^2) \vdash 9 \implies \dim \pi_\lambda = \frac{9!}{7\cdot4\cdot3\cdot1\cdot5\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1} = 216.$

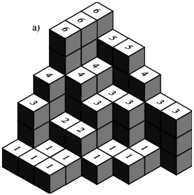
7	4	3	1
5	2	1	
2			
1			

Плоские разбиения

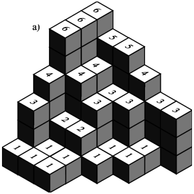
- Плоское разбиение формы λ — отображение $\pi : \lambda \to \mathbb{N}$: $\pi(\square_1) \geq \pi(\square_2)$, если $\square_2$ лежит ниже или правее $\square_1$.
- Отождествляется с трёхмерной диаграммой Юнга: над каждой клеткой $\square$ диаграммы λ поставлено $\pi(\square)$ кубиков.
- **Пример:** плоское разбиение формы $\lambda = (65^2 43^2)$.



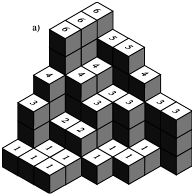
- $\mathrm{PP}(\lambda)$ — множество всех плоских разбиений формы λ.
- $|\pi| := \sum \pi_{ij}$ — размер (вес) плоского разбиения π.



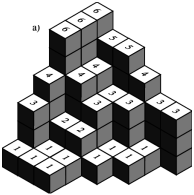
- $\pi \leftrightarrow$ последовательность разбиений $\lambda = \lambda^{(0)} \supseteq \lambda^{(1)} \supseteq \ldots$, где $\lambda^{(i-1)}/\lambda^{(i)} = \pi^{-1}(i)$.
- В примере $\lambda^{(0)} = (65^2 43^2)$, $\lambda^{(1)} = (643^2 1)$, $\lambda^{(2)} = (6431^2)$, $\lambda^{(3)} = (42^2 1)$, $\lambda^{(4)} = (31^2)$, $\lambda^{(5)} = (1^3)$, $\lambda^{(6)} = \emptyset$.



- $\pi \leftrightarrow$ последовательность разбиений $\lambda = \lambda^{(0)} \supseteq \lambda^{(1)} \supseteq \ldots$, где $\lambda^{(i-1)}/\lambda^{(i)} = \pi^{-1}(i)$.
- В примере $\lambda^{(0)} = (65^2 43^2)$, $\lambda^{(1)} = (643^2 1)$, $\lambda^{(2)} = (6431^2)$, $\lambda^{(3)} = (42^2 1)$, $\lambda^{(4)} = (31^2)$, $\lambda^{(5)} = (1^3)$, $\lambda^{(6)} = \emptyset$.
- Строгое по столбцам плоское разбиение $\iff$ $\pi(\square_1) > \pi(\square_2)$, если $\square_2$ лежит ниже $\square_1$.



- $\pi \leftrightarrow$ последовательность разбиений $\lambda = \lambda^{(0)} \supseteq \lambda^{(1)} \supseteq \ldots$, где $\lambda^{(i-1)}/\lambda^{(i)} = \pi^{-1}(i)$.
- В примере $\lambda^{(0)} = (65^2 43^2)$, $\lambda^{(1)} = (643^2 1)$, $\lambda^{(2)} = (6431^2)$, $\lambda^{(3)} = (42^2 1)$, $\lambda^{(4)} = (31^2)$, $\lambda^{(5)} = (1^3)$, $\lambda^{(6)} = \emptyset$.
- Строгое по столбцам плоское разбиение $\iff$ $\pi(\square_1) > \pi(\square_2)$, если $\square_2$ лежит ниже $\square_1$.
- $\iff$ $\pi^{-1}(i) = \lambda^{(i-1)}/\lambda^{(i)}$ — горизонтальная полоса $\iff$ π — обратная полустандартная таблица формы λ.



- $\pi \leftrightarrow$ последовательность разбиений $\lambda = \lambda^{(0)} \supseteq \lambda^{(1)} \supseteq \ldots$, где $\lambda^{(i-1)}/\lambda^{(i)} = \pi^{-1}(i)$.
- В примере $\lambda^{(0)} = (65^2 43^2)$, $\lambda^{(1)} = (643^2 1)$, $\lambda^{(2)} = (6431^2)$, $\lambda^{(3)} = (42^2 1)$, $\lambda^{(4)} = (31^2)$, $\lambda^{(5)} = (1^3)$, $\lambda^{(6)} = \emptyset$.
- Строгое по столбцам плоское разбиение $\iff$ $\pi(\square_1) > \pi(\square_2)$, если $\square_2$ лежит ниже $\square_1$.
- $\iff$ $\pi^{-1}(i) = \lambda^{(i-1)}/\lambda^{(i)}$ — горизонтальная полоса $\iff$ π — обратная полустандартная таблица формы λ.
- $\mathrm{CSPP}(\lambda) \simeq \widehat{\mathrm{SSYT}}(\lambda)$ — множество строгих по столбцам плоских разбиений формы λ.

- $S \subset \mathrm{PP} \rightsquigarrow$ производящая функция $F_S(q) := \sum_{\pi \in S} q^{|\pi|}$.

- $S \subset \mathrm{PP} \rightsquigarrow$ производящая функция $F_S(q) := \sum_{\pi \in S} q^{|\pi|}$.

Предложение (CSPP ограниченной высоты)

$S := \{\pi \in \mathrm{CSPP}(\lambda) \colon \pi_{ij} \leq n\} \implies$

$$\boxed{F_S(q) = s_\lambda(q, q^2, \ldots, q^n) = q^{|\lambda| + b(\lambda)} \cdot \prod_{\square \in \lambda} \frac{1 - q^{n + c(\square)}}{1 - q^{h(\square)}}}.$$

- $S \subset \mathrm{PP} \rightsquigarrow$ производящая функция $F_S(q) := \sum_{\pi \in S} q^{|\pi|}$.

Предложение (CSPP ограниченной высоты)

$S := \{\pi \in \mathrm{CSPP}(\lambda) \colon \pi_{ij} \le n\} \implies$

$$\boxed{F_S(q) = s_\lambda(q, q^2, \ldots, q^n) = q^{|\lambda| + b(\lambda)} \cdot \prod_{\square \in \lambda} \frac{1 - q^{n + c(\square)}}{1 - q^{h(\square)}}}.$$

Доказательство: $s_\lambda(x) = \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)} x^T = \sum_{T \in \mathrm{CSPP}(\lambda)} x^T \implies$

$s_\lambda(q, q^2, \ldots, q^n) = \sum_{T \in \mathrm{CSPP}(\lambda)} q^{\sum i \alpha_i(T)} = \sum_{T \in \mathrm{CSPP}(\lambda)} q^{|\pi|}$.

- $S \subset \mathrm{PP} \rightsquigarrow$ производящая функция $F_S(q) := \sum_{\pi \in S} q^{|\pi|}$.

Предложение (CSPP ограниченной высоты)

$S := \{\pi \in \mathrm{CSPP}(\lambda) \colon \pi_{ij} \leq n\} \implies$

$$\boxed{F_S(q) = s_\lambda(q, q^2, \ldots, q^n) = q^{|\lambda| + b(\lambda)} \cdot \prod_{\square \in \lambda} \frac{1 - q^{n + c(\square)}}{1 - q^{h(\square)}}}.$$

Доказательство: $s_\lambda(x) = \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)} x^T = \sum_{T \in \mathrm{CSPP}(\lambda)} x^T \implies$

$$s_\lambda(q, q^2, \ldots, q^n) = \sum_{T \in \mathrm{CSPP}(\lambda)} q^{\sum i \alpha_i(T)} = \sum_{T \in \mathrm{CSPP}(\lambda)} q^{|\pi|}.$$

Предложение (производящая функция CSPP)

$$\boxed{F_{\mathrm{CSPP}(\lambda)}(q) = \frac{q^{|\lambda| + b(\lambda)}}{\prod_{\square \in \lambda} (1 - q^{h(\square)})}}.$$

- $S \subset \mathrm{PP} \rightsquigarrow$ производящая функция $F_S(q) := \sum_{\pi \in S} q^{|\pi|}$.

Предложение (CSPP ограниченной высоты)

$S := \{\pi \in \mathrm{CSPP}(\lambda) \colon \pi_{ij} \le n\} \implies$

$$\boxed{F_S(q) = s_\lambda(q, q^2, \ldots, q^n) = q^{|\lambda| + b(\lambda)} \cdot \prod_{\square \in \lambda} \frac{1 - q^{n + c(\square)}}{1 - q^{h(\square)}}}.$$

Доказательство: $s_\lambda(x) = \sum_{T \in \mathrm{SSYT}(\lambda)} x^T = \sum_{T \in \mathrm{CSPP}(\lambda)} x^T \implies$

$$s_\lambda(q, q^2, \ldots, q^n) = \sum_{T \in \mathrm{CSPP}(\lambda)} q^{\sum i\alpha_i(T)} = \sum_{T \in \mathrm{CSPP}(\lambda)} q^{|\pi|}.$$

Предложение (производящая функция CSPP)

$$\boxed{F_{\mathrm{CSPP}(\lambda)}(q) = \frac{q^{|\lambda| + b(\lambda)}}{\prod_{\square \in \lambda} (1 - q^{h(\square)})}}.$$

Доказательство: в предыдущей формуле $n \to \infty$.

- $\mathcal{B}_{\ell mn} := \{\pi \in \mathrm{PP} : \pi_{ij} \le n,\ \ell(\lambda) \le \ell,\ \ell(\lambda') \le m\}$, где $\lambda = \mathrm{sh}(\pi)$, — плоские разбиения в ящике $\ell \times m \times n$ (обозначим его $B_{\ell mn}$).

- $\mathcal{B}_{\ell mn} := \{\pi \in \mathrm{PP} : \pi_{ij} \leq n,\ \ell(\lambda) \leq \ell,\ \ell(\lambda') \leq m\}$, где $\lambda = \mathrm{sh}(\pi)$, — плоские разбиения в ящике $\ell \times m \times n$ (обозначим его $B_{\ell mn}$).

Теорема (плоские разбиения в ящике)

$$\boxed{F_{\mathcal{B}_{\ell mn}}(q) = \prod_{\square \in B_{\ell mn}} \frac{1 - q^{1+\mathrm{ht}(\square)}}{1 - q^{\mathrm{ht}(\square)}}},$$ *где* $\mathrm{ht}(i,j,k) = i + j + k - 2$.

- $\mathcal{B}_{\ell mn} := \{\pi \in \mathrm{PP} : \pi_{ij} \le n,\ \ell(\lambda) \le \ell,\ \ell(\lambda') \le m\}$, где $\lambda = \mathrm{sh}(\pi)$, — плоские разбиения в ящике $\ell \times m \times n$ (обозначим его $B_{\ell mn}$).

Теорема (плоские разбиения в ящике)

$$\boxed{F_{\mathcal{B}_{\ell mn}}(q) = \prod_{\square \in B_{\ell mn}} \frac{1 - q^{1+\mathrm{ht}(\square)}}{1 - q^{\mathrm{ht}(\square)}}},$$ *где* $\mathrm{ht}(i, j, k) = i + j + k - 2$.

Доказательство.

- К каждой части в i-й строке прямоугольника $\ell \times m$ добавим $\ell + 1 - i \rightsquigarrow$ CSPP формы m^ℓ с max частью $\le \ell + n$. И это биекция.

- $\mathcal{B}_{\ell mn} := \{\pi \in \mathrm{PP} : \pi_{ij} \leq n,\ \ell(\lambda) \leq \ell,\ \ell(\lambda') \leq m\}$, где $\lambda = \mathrm{sh}(\pi)$, — плоские разбиения в ящике $\ell \times m \times n$ (обозначим его $B_{\ell mn}$).

Теорема (плоские разбиения в ящике)

$$\boxed{F_{\mathcal{B}_{\ell mn}}(q) = \prod_{\square \in B_{\ell mn}} \frac{1 - q^{1+\mathrm{ht}(\square)}}{1 - q^{\mathrm{ht}(\square)}}},$$ *где* $\mathrm{ht}(i, j, k) = i + j + k - 2$.

Доказательство.

- К каждой части в i-й строке прямоугольника $\ell \times m$ добавим $\ell + 1 - i \rightsquigarrow$ CSPP формы m^ℓ с max частью $\leq \ell + n$. И это биекция.
- К весу добавили $\sum_{i=1}^{\ell} (\ell + 1 - i)m = \frac{m\ell(\ell+1)}{2}$.

- $\mathcal{B}_{\ell mn} := \{\pi \in \mathrm{PP} : \pi_{ij} \le n,\ \ell(\lambda) \le \ell,\ \ell(\lambda') \le m\}$, где $\lambda = \mathrm{sh}(\pi)$, — плоские разбиения в ящике $\ell \times m \times n$ (обозначим его $B_{\ell mn}$).

Теорема (плоские разбиения в ящике)

$$\boxed{F_{\mathcal{B}_{\ell mn}}(q) = \prod_{\square \in B_{\ell mn}} \frac{1 - q^{1+\mathrm{ht}(\square)}}{1 - q^{\mathrm{ht}(\square)}}}$$, *где* $\mathrm{ht}(i,j,k) = i + j + k - 2$.

Доказательство.

- К каждой части в i-й строке прямоугольника $\ell \times m$ добавим $\ell + 1 - i \rightsquigarrow$ CSPP формы m^ℓ с max частью $\le \ell + n$. И это биекция.
- К весу добавили $\sum_{i=1}^{\ell} (\ell + 1 - i)m = \frac{m\ell(\ell+1)}{2}$.
- $b(m^\ell) = m\binom{\ell}{2} = \frac{m\ell(\ell-1)}{2} \implies m\ell + b(m^\ell) = \frac{m\ell(\ell+1)}{2}$.

- $\mathcal{B}_{\ell mn} := \{\pi \in \mathrm{PP} : \pi_{ij} \le n,\ \ell(\lambda) \le \ell,\ \ell(\lambda') \le m\}$, где $\lambda = \mathrm{sh}(\pi)$, — плоские разбиения в ящике $\ell \times m \times n$ (обозначим его $B_{\ell mn}$).

Теорема (плоские разбиения в ящике)

$$\boxed{F_{\mathcal{B}_{\ell mn}}(q) = \prod_{\square \in B_{\ell mn}} \frac{1 - q^{1+\mathrm{ht}(\square)}}{1 - q^{\mathrm{ht}(\square)}}},$$ *где* $\mathrm{ht}(i,j,k) = i + j + k - 2$.

Доказательство.

- К каждой части в i-й строке прямоугольника $\ell \times m$ добавим $\ell + 1 - i \rightsquigarrow$ CSPP формы m^ℓ с max частью $\le \ell + n$. И это биекция.
- К весу добавили $\sum_{i=1}^{\ell} (\ell + 1 - i)m = \frac{m\ell(\ell+1)}{2}$.
- $b(m^\ell) = m\binom{\ell}{2} = \frac{m\ell(\ell-1)}{2} \implies m\ell + b(m^\ell) = \frac{m\ell(\ell+1)}{2}$.
- $\implies F_{\mathcal{B}_{\ell mn}}(q) = \prod_{\square \in (m^\ell)} \frac{1-q^{\ell+n+c(\square)}}{1-q^{h(\square)}} \overset{(\bigstar)}{=} \prod_{\square \in B_{\ell mn}} \frac{1-q^{1+\mathrm{ht}(\square)}}{1-q^{\mathrm{ht}(\square)}}$.

Предложение (формула Мак-Магона)

$$\boxed{F_{\mathrm{PP}}(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n}} = 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 13q^4 + 25q^5 + \dots.$$

Предложение (формула Мак-Магона)

$$\boxed{F_{\mathrm{PP}}(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n}} = 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 13q^4 + 25q^5 + \dots.$$

Доказательство.

- $\#\{(i,j,k)\colon\ i,j,k \geq 1,\ i+j+k-2 = n\} = [t^{n-1}]\frac{1}{(1-t)^3} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Предложение (формула Мак-Магона)

$$\boxed{F_{\mathrm{PP}}(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n}} = 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 13q^4 + 25q^5 + \dots.$$

Доказательство.

- $\#\{(i,j,k)\colon i,j,k \geq 1,\ i+j+k-2 = n\} = [t^{n-1}]\frac{1}{(1-t)^3} = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $F_{\mathrm{PP}}(q) = \prod_{\square} \frac{1-q^{1+\mathrm{ht}(\square)}}{1-q^{\mathrm{ht}(\square)}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^n}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n}$.

Предложение (формула Мак-Магона)

$$\boxed{F_{\mathrm{PP}}(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n}} = 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 13q^4 + 25q^5 + \ldots.$$

Доказательство.

- $\#\{(i,j,k)\colon i,j,k \geq 1,\ i+j+k-2 = n\} = [t^{n-1}]\frac{1}{(1-t)^3} = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $F_{\mathrm{PP}}(q) = \prod_{\square} \frac{1-q^{1+\mathrm{ht}(\square)}}{1-q^{\mathrm{ht}(\square)}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^n}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n}$.

Гипотеза Мак-Магона: производящая функция для r-мерных разбиений равна

$$\prod_{n\geq 1}(1-x^n)^{-\binom{n+r-2}{r-1}}.$$

Неверна! Уже для $r = 3$.

Предложение (формула Мак-Магона)

$$\boxed{F_{\mathrm{PP}}(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n}} = 1 + q + 3q^2 + 6q^3 + 13q^4 + 25q^5 + \dots.$$

Доказательство.

- $\#\{(i,j,k) \colon i,j,k \geq 1,\ i+j+k-2 = n\} = [t^{n-1}]\frac{1}{(1-t)^3} = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $F_{\mathrm{PP}}(q) = \prod_{\square} \frac{1-q^{1+\mathrm{ht}(\square)}}{1-q^{\mathrm{ht}(\square)}} = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^n}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-n}$.

$(\bigstar)$ $S := \{\pi \in \mathrm{PP} \colon \pi_{ij} \leq m\} \implies F_S(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-\min(m,n)}$.