Теория представлений симметрических групп

Лекция 13. Двойственность Шура–Вейля для $\mathfrak{S}_n$ и $\mathrm{GL}(V)$

Н. В. Цилевич

26 ноября 2021 г.

Лемма

Образ группы $\mathrm{GL}(V)$ *в* $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ *порождает* B.

Лемма

Образ группы $\mathrm{GL}(V)$ *в* $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ *порождает* B.

Доказательство.

- Знаем: B порождена $b^{\otimes n}$, $b \in \mathrm{End}(V)$.
- $C :=$ линейная оболочка элементов $g^{\otimes n}$, $g \in \mathrm{GL}(V)$.
- $b \in \mathrm{End}(V) \implies$ для почти всех t имеем $tE + b \in GL(V) \implies (tE + b)^{\otimes n} \in C$.
- $(tE + b)^{\otimes n}$ – многочлен от $t \implies$ это верно для всех $t \implies$ верно при $t = 0 \implies b^{\otimes n} \in C \implies$ QED.

Теорема (двойственность Шура–Вейля для $\mathrm{GL}(V)$)

Имеет место разложение $(\mathfrak{S}_n \otimes \mathrm{GL}(V))$*-представлений*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda \otimes L_\lambda,$$

где V_λ *– неприводимые представления* $\mathfrak{S}_n$*, а* $L_\lambda = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(V_\lambda, V^{\otimes n})$ *– различные неприводимые представления* $\mathrm{GL}(V)$ *или нули.*

Теорема (двойственность Шура–Вейля для $\mathrm{GL}(V)$)

Имеет место разложение $(\mathfrak{S}_n \otimes \mathrm{GL}(V))$*-представлений*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda \otimes L_\lambda,$$

где V_λ *– неприводимые представления* $\mathfrak{S}_n$*, а* $L_\lambda = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(V_\lambda, V^{\otimes n})$ *– различные неприводимые представления* $\mathrm{GL}(V)$ *или нули.*

Пример.

- $L_{(n)} = \mathrm{Sym}^n(V)$,
- $L_{(1^n)} = \bigwedge^n(V)$.

В частности, $\mathrm{Sym}^n(V)$ и $\bigwedge^n(V)$ – неприводимые представления $\mathrm{GL}(V)$.

Функции Шура

- Фиксируем набор переменных $x = (x_1, \dots, x_N)$.
- $\Delta(x) = \det(x_i^{N-j})_{i,j=1}^N$ – определитель Вандермонда.
- $\delta = (N-1, N-2, \dots, 1, 0)$ – лестничная диаграмма.
- $\lambda \vdash n \rightsquigarrow \Delta_\lambda(x) := \det(x^{\lambda+\delta}) = \det(x_i^{\lambda_j+N-j})_{i,j=1}^N$, где $N \geqslant \ell(\lambda)$.
- $\lambda + \delta$ – строгое разбиение (элементы строго убывают).

Функции Шура

- Фиксируем набор переменных $x = (x_1, \ldots, x_N)$.
- $\Delta(x) = \det(x_i^{N-j})_{i,j=1}^N$ – определитель Вандермонда.
- $\delta = (N-1, N-2, \ldots, 1, 0)$ – лестничная диаграмма.
- $\lambda \vdash n \rightsquigarrow \Delta_\lambda(x) := \det(x^{\lambda+\delta}) = \det(x_i^{\lambda_j+N-j})_{i,j=1}^N$, где $N \geqslant \ell(\lambda)$.
- $\lambda + \delta$ – строгое разбиение (элементы строго убывают).

Определение (функция Шура)

$$\boxed{s_\lambda(x) := \frac{\Delta_\lambda(x)}{\Delta(x)}}.$$

Напоминание.

- Симметрические степенные суммы: $p_k(x) := \sum_j x_j^k$;

  $\mu = (k^{i_k}) \rightsquigarrow p_\mu(x) := \prod_{k\geqslant 1} p_k(x)^{i_k}$.

- Формула Фробениуса: $\chi^\lambda(\mu) = [x^{\lambda+\delta}]\,(\Delta(x)p_\mu(x))$.

Теорема

Пусть $\mu = (k^{i_k}) \vdash n$ *и* $x = (x_1, \ldots, x_N)$. *Тогда*

$$\boxed{p_\mu(x) = \sum_{\lambda\vdash n,\, \ell(\lambda)\leq N} \chi^\lambda(\mu) s_\lambda(x)}.$$

Доказательство

- Достаточно: $\Delta(x)p_\mu(x) = \sum\limits_{\lambda\vdash n,\,\ell(\lambda)\le N} \chi^\lambda(\mu)\Delta_\lambda(x)$.
- Сравниваем коэффициенты при x^ν. Обе части антисимметричны $\implies$ достаточно для $\nu_1 > \ldots > \nu_N$.

Доказательство

- Достаточно: $\Delta(x) p_\mu(x) = \sum_{\lambda \vdash n,\, \ell(\lambda) \le N} \chi^\lambda(\mu) \Delta_\lambda(x)$.
- Сравниваем коэффициенты при x^ν. Обе части антисимметричны $\implies$ достаточно для $\nu_1 > \ldots > \nu_N$.
- Обе части однородны степени $(N-1) + (N-2) + \ldots + 1 + n \implies$ можно считать, что $\nu_1 + \ldots + \nu_N = (N-1) + (N-2) + \ldots + 1 + n$.
- Такое ν представляется в виде $\nu = \rho + \delta$, где $\rho \vdash n$.

Доказательство

- Достаточно: $\Delta(x)p_\mu(x) = \sum_{\lambda \vdash n,\, \ell(\lambda) \le N} \chi^\lambda(\mu)\Delta_\lambda(x)$.
- Сравниваем коэффициенты при x^ν. Обе части антисимметричны $\implies$ достаточно для $\nu_1 > \ldots > \nu_N$.
- Обе части однородны степени $(N-1)+(N-2)+\ldots+1+n \implies$ можно считать, что $\nu_1+\ldots+\nu_N = (N-1)+(N-2)+\ldots+1+n$.
- Такое ν представляется в виде $\nu = \rho + \delta$, где $\rho \vdash n$.
- $[x^\nu]$(л.ч.) $= \chi^\rho(\mu)$ по формуле Фробениуса.

Доказательство

- Достаточно: $\Delta(x)p_\mu(x) = \sum_{\lambda\vdash n,\,\ell(\lambda)\le N} \chi^\lambda(\mu)\Delta_\lambda(x)$.
- Сравниваем коэффициенты при x^ν. Обе части антисимметричны $\implies$ достаточно для $\nu_1 > \ldots > \nu_N$.
- Обе части однородны степени $(N-1)+(N-2)+\ldots+1+n \implies$ можно считать, что $\nu_1+\ldots+\nu_N = (N-1)+(N-2)+\ldots+1+n$.
- Такое ν представляется в виде $\nu = \rho+\delta$, где $\rho \vdash n$.
- $[x^\nu]$(л.ч.) $= \chi^\rho(\mu)$ по формуле Фробениуса.
- $\Delta_\lambda(x)$ содержит лишь один моном со строго убывающими показателями – это $x^{\lambda+\delta} \implies$

$$[x^\nu](\text{п.ч.}) = [x^{\rho+\delta}]\left(\sum_{\lambda\vdash n,\,\ell(\lambda)\le N} \chi^\lambda(\mu)x^{\lambda+\delta}\right) = \chi^\rho(\mu).$$

Теорема

$$\boxed{s_\lambda(1, q, \dots, q^{N-1}) = \prod_{1 \le i < j \le N} \frac{q^{\lambda_i - i} - q^{\lambda_j - j}}{q^{-i} - q^{-j}}}.$$

$$\boxed{s_\lambda(\underbrace{1, \dots, 1}_{N}) = \prod_{1 \le i < j \le N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}}.$$

Теорема

$$\boxed{s_\lambda(1, q, \ldots, q^{N-1}) = \prod_{1\le i<j\le N} \frac{q^{\lambda_i - i} - q^{\lambda_j - j}}{q^{-i} - q^{-j}}}.$$

$$\boxed{s_\lambda(\underbrace{1, \ldots, 1}_{N}) = \prod_{1\le i<j\le N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}}.$$

Доказательство.

- $\Delta_\lambda(1, q, \ldots, q^{N-1})$ – определитель Вандермонда для $x_i = q^{\lambda_i + N - i}$, $1 \le i \le N$, $\implies \Delta_\lambda(1, q, \ldots, q^{N-1}) = \prod_{i<j}(q^{\lambda_i+N-i} - q^{\lambda_j+N-j})$.

  Аналогично $\Delta(1, q, \ldots, q^{N-1}) = \prod_{i<j}(q^{N-i} - q^{N-j})$.

  Делим $\implies$ OK.
- Вторая формула: $q \to 1$.

Напоминание

Теорема (двойственность Шура–Вейля для $\mathrm{GL}(V)$)

Имеет место разложение $(\mathfrak{S}_n \otimes \mathrm{GL}(V))$*-представлений*

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda \otimes L_\lambda,$$

где V_λ *– неприводимые представления* $\mathfrak{S}_n$*, а* $L_\lambda = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(V_\lambda, V^{\otimes n})$ *– различные неприводимые представления* $\mathrm{GL}(V)$ *или нули.*

Теорема

1. $L_\lambda = 0 \iff \ell(\lambda) > N$, *где* $N = \dim V$.
2. *При* $\ell(\lambda) \leq N$ *характер неприводимого представления* L_λ *группы* $\mathrm{GL}(V)$ *есть функция Шура* s_λ*: если* $g \in \mathrm{GL}(V)$ *имеет с.ч.* $x_1, \ldots, x_N$, *то*
$$\boxed{\chi_{L_\lambda}(g) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_N)}.$$
3. *Формула Вейля для размерностей:*
$$\boxed{\dim L_\lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i}}.$$

Доказательство

- Пусть $g \in \mathrm{GL}(V)$ имеет с.ч. $x_1, \ldots, x_N$. Вычислим след $\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s)$, где $s \in \mathfrak{S}_n$ имеет цикловый тип $\mu = (k^{i_k})$.

Доказательство

- Пусть $g \in \mathrm{GL}(V)$ имеет с.ч. $x_1, \ldots, x_N$. Вычислим след $\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s)$, где $s \in \mathfrak{S}_n$ имеет цикловый тип $\mu = (k^{i_k})$.
- Пусть $C_1, \ldots, C_q$ – циклы s. Обозначим $W_j := \bigotimes_{i \in C_j} V_i$. Тогда

$$V^{\otimes n} = \bigotimes_{i=1}^{q} W_j \text{ и } \mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s) = \prod_{i=1}^{q} \mathrm{Tr}_{W_j}(g^{\otimes n} \otimes s).$$

Доказательство

- Пусть $g \in \mathrm{GL}(V)$ имеет с.ч. $x_1, \ldots, x_N$. Вычислим след $\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s)$, где $s \in \mathfrak{S}_n$ имеет цикловый тип $\mu = (k^{i_k})$.
- Пусть $C_1, \ldots, C_q$ – циклы s. Обозначим $W_j := \bigotimes_{i \in C_j} V_i$. Тогда
$$V^{\otimes n} = \bigotimes_{i=1}^{q} W_j \text{ и } \mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s) = \prod_{i=1}^{q} \mathrm{Tr}_{W_j}(g^{\otimes n} \otimes s).$$
- Рассмотрим цикл $C = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ длины k. Тогда $(g^{\otimes n} \otimes s)(v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_k}) = gv_{j_k} \otimes gv_{j_1} \ldots \otimes gv_{j_{k-1}}$.

Доказательство

- Пусть $g \in \mathrm{GL}(V)$ имеет с.ч. $x_1, \ldots, x_N$. Вычислим след $\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s)$, где $s \in \mathfrak{S}_n$ имеет цикловый тип $\mu = (k^{i_k})$.
- Пусть $C_1, \ldots, C_q$ – циклы s. Обозначим $W_j := \bigotimes_{i \in C_j} V_i$. Тогда

$$V^{\otimes n} = \bigotimes_{i=1}^{q} W_j \text{ и } \mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s) = \prod_{i=1}^{q} \mathrm{Tr}_{W_j}(g^{\otimes n} \otimes s).$$

- Рассмотрим цикл $C = (j_1, j_2, \ldots, j_k)$ длины k. Тогда $(g^{\otimes n} \otimes s)(v_{j_1} \otimes \ldots \otimes v_{j_k}) = gv_{j_k} \otimes gv_{j_1} \ldots \otimes gv_{j_{k-1}}$.
- Пусть A – матрица g в базисе $\{v_j\}$ $\implies$

$$\mathrm{Tr}\,|_{W_C}(g^{\otimes n} \otimes s) = \sum_{j_1, \ldots, j_k} A_{j_k j_1} A_{j_1 j_2} \ldots A_{j_{k-1} j_k} = \mathrm{Tr}(g^k) = p_k(x).$$

Продолжение доказательства

- Итого $\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s) = \prod_k p_k(x)^{i_k} = p_\mu(x)$.

Продолжение доказательства

- Итого $\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s) = \prod_k p_k(x)^{i_k} = p_\mu(x)$.
- Двойственность Шура–Вейля $\implies$

$$\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s) = \sum_\lambda \chi^\lambda(\mu)\chi_{L_\lambda}(g).$$

- Итого $p_\mu(x) = \sum_\lambda \chi^\lambda(\mu)\chi_{L_\lambda}(g)$.

Продолжение доказательства

- Итого $\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s) = \prod_k p_k(x)^{i_k} = p_\mu(x)$.
- Двойственность Шура–Вейля $\implies$

$$\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s) = \sum_\lambda \chi^\lambda(\mu)\chi_{L_\lambda}(g).$$

- Итого $p_\mu(x) = \sum_\lambda \chi^\lambda(\mu)\chi_{L_\lambda}(g)$.
- По теореме о функциях Шура $p_\mu(x) = \sum_{\lambda \vdash n,\, \ell(\lambda) \le N} \chi^\lambda(\mu) s_\lambda(x)$.
- Характеры линейно независимы $\implies$ QED пункты 1 и 2.

Продолжение доказательства

- Итого $\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s) = \prod_k p_k(x)^{i_k} = p_\mu(x)$.
- Двойственность Шура–Вейля $\implies$

$$\mathrm{Tr}_{V^{\otimes n}}(g^{\otimes n} \otimes s) = \sum_\lambda \chi^\lambda(\mu)\chi_{L_\lambda}(g).$$

- Итого $p_\mu(x) = \sum_\lambda \chi^\lambda(\mu)\chi_{L_\lambda}(g)$.
- По теореме о функциях Шура $p_\mu(x) = \sum_{\lambda \vdash n,\, \ell(\lambda) \leq N} \chi^\lambda(\mu) s_\lambda(x)$.
- Характеры линейно независимы $\implies$ QED пункты 1 и 2.
- $\dim L_\lambda = \chi^\lambda(e) = s_\lambda(1, \dots, 1) \implies$ формула Вейля.

А в курсе симметрических функций мы получили более удобную формулу для размерности ($\bigstar$) :

$$\dim L_\lambda = \prod_{\square \in \lambda} \frac{N + c(\square)}{h(\square)}.$$

А в курсе симметрических функций мы получили более удобную формулу для размерности (★) :

$$\dim L_\lambda = \prod_{\square \in \lambda} \frac{N + c(\square)}{h(\square)}.$$

Примеры.

- $\lambda = (1^n) \implies L_{(1^n)} = \Lambda^n(V) \implies$ $\mathrm{tr}(g) = \sum_{i_1, \ldots, i_n \text{ разл.}} x_{i_1} \ldots x_{i_n} = e_n(x_1, \ldots, x_N) \implies s_{(1^n)} = e_n$ (элементарная симметрическая функция).
- $\lambda = (n) \implies L_{(1^n)} = \mathrm{Sym}^n(V) \implies$ $\mathrm{tr}(g) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} x_{i_1} \ldots x_{i_n} = h_n(x_1, \ldots, x_N) \implies s_{(n)} = h_n$ (полная однородная симметрическая функция).

Теорема (двойственность Шура–Вейля)

Имеет место разложение $(\mathfrak{S}_n \otimes \mathrm{GL}(V))$*-представлений*

$$\boxed{V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \vdash n,\ \ell(\lambda) \leq N} V_\lambda \otimes L_\lambda},$$

где V_λ *– неприводимые представления* $\mathfrak{S}_n$*, а* L_λ *– неприводимые представления* $\mathrm{GL}(V)$*.*

Теорема (двойственность Шура–Вейля)

Имеет место разложение $(\mathfrak{S}_n \otimes \mathrm{GL}(V))$*-представлений*

$$\boxed{V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \vdash n,\ \ell(\lambda) \le N} V_\lambda \otimes L_\lambda},$$

где V_λ *– неприводимые представления* $\mathfrak{S}_n$, *а* L_λ *– неприводимые представления* $\mathrm{GL}(V)$.

Следствие

- $V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \vdash n,\ \ell(\lambda) \le N} m_\lambda V_\lambda$, *где* $m_\lambda = \dim L_\lambda$, *— разложение на неприводимые представления* $\mathfrak{S}_n$.
- $V^{\otimes n} = \bigoplus_{\lambda \vdash n,\ \ell(\lambda) \le N} d_\lambda L_\lambda$, *где* $d_\lambda = \dim \pi_\lambda$, *— разложение на неприводимые представления* $\mathrm{GL}(V)$.

Примеры

- $n = 2 \implies V \otimes V = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \Lambda^2(V) = L_{(2)} \oplus L_{(1^2)}$;
  - $\dim \mathrm{Sym}^2(V) = \prod_{j=2}^{N} \frac{2+j-1}{j-1} = \frac{N(N+1)}{2}$, проекция на $\mathrm{Sym}^2(V)$ – симметризатор $S_{(2)}(v_1 \otimes v_2) = \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 + v_2 \otimes v_1)$.
  - $\dim \Lambda^2(V) = \prod_{j=3}^{N} \frac{1+j-1}{j-1}\frac{1+j-2}{j-2} = \prod_{j=3}^{N} \frac{j}{j-2} = \frac{N(N-1)}{2}$, проекция на $\Lambda^2(V)$ – антисимметризатор $S_{(2)}(v_1 \otimes v_2) = \frac{1}{2}(v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1)$.

Примеры

- $n=2 \implies V\otimes V = \mathrm{Sym}^2(V)\oplus\Lambda^2(V) = L_{(2)}\oplus L_{(1^2)}$;
  - $\dim \mathrm{Sym}^2(V) = \prod_{j=2}^{N}\frac{2+j-1}{j-1} = \frac{N(N+1)}{2}$, проекция на $\mathrm{Sym}^2(V)$ – симметризатор $S_{(2)}(v_1\otimes v_2) = \frac{1}{2}(v_1\otimes v_2 + v_2\otimes v_1)$.
  - $\dim \Lambda^2(V) = \prod_{j=3}^{N}\frac{1+j-1}{j-1}\frac{1+j-2}{j-2} = \prod_{j=3}^{N}\frac{j}{j-2} = \frac{N(N-1)}{2}$, проекция на $\Lambda^2(V)$ – антисимметризатор $S_{(2)}(v_1\otimes v_2) = \frac{1}{2}(v_1\otimes v_2 - v_2\otimes v_1)$.
- $n=3 \implies V\otimes V\otimes V = \mathrm{Sym}^3(V)\oplus\Lambda^3(V)\oplus 2L_{(2,1)}$;
  - $\dim \mathrm{Sym}^3(V) = \frac{N(N+1)(N+2)}{6}$, симметризатор;
  - $\dim \Lambda^3(V) = \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$, антисимметризатор;
  - $\dim L_{(2,1)} = \frac{N(N^2-1)}{3}$, проекция на $2L_{(2,1)}$ есть $S_{(2,1)}(v_1\otimes v_2\otimes v_3) = \frac{1}{4}(v_1\otimes v_2\otimes v_3 + v_2\otimes v_1\otimes v_3 - v_3\otimes v_2\otimes v_1 - v_2\otimes v_3\otimes v_1)$.

Ещё пример

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} = \bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \pi_{(n-k,k)} \otimes L_{(n-k,k)}.$$

- $\dim \pi_{(n-k,k)} = \frac{n!(n-2k+1)}{(n-k+1)!k!} = \frac{n-2k+1}{n-k+1}\binom{n}{k}$.
- $(\bigstar)$ $\dim L_{(n-k,k)} = n - 2k + 1$.

Ещё пример

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} = \bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \pi_{(n-k,k)} \otimes L_{(n-k,k)}.$$

- $\dim \pi_{(n-k,k)} = \frac{n!(n-2k+1)}{(n-k+1)!k!} = \frac{n-2k+1}{n-k+1}\binom{n}{k}$.
- $(\star)$ $\dim L_{(n-k,k)} = n - 2k + 1$.

Получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(n-2k+1)^2}{n-k+1}\binom{n}{k} = 2^n.$$

Ещё пример

$$(\mathbb{C}^2)^{\otimes n} = \bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \pi_{(n-k,k)} \otimes L_{(n-k,k)}.$$

- $\dim \pi_{(n-k,k)} = \frac{n!(n-2k+1)}{(n-k+1)!k!} = \frac{n-2k+1}{n-k+1}\binom{n}{k}$.
- $(\bigstar)$ $\dim L_{(n-k,k)} = n - 2k + 1$.

Получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(n-2k+1)^2}{n-k+1}\binom{n}{k} = 2^n.$$

Пример $n = 4$:

λ	(4)	(31)	(2)
$\dim \pi_\lambda$	1	3	2
$\dim L_\lambda$	5	3	1
$\dim(\pi_\lambda \otimes L_\lambda)$	5	9	2

Симметризаторы Юнга

- $\mathfrak{S}_n$ действует на (произвольных) таблицах формы λ.
- $\lambda \rightsquigarrow$ максимальная таблица T формы $\lambda \rightsquigarrow$
  - строчный стабилизатор $P_\lambda := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \colon \sigma$ сохраняет строки $T\}$.
  - столбцовый стаб. $Q_\lambda := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \colon \sigma$ сохраняет столбцы $T\} \subset \mathfrak{S}_n$.

Очевидно, $P_\lambda \cap Q_\lambda = \{e\}$.

Симметризаторы Юнга

- $\mathfrak{S}_n$ действует на (произвольных) таблицах формы λ.
- $\lambda \rightsquigarrow$ максимальная таблица T формы $\lambda \rightsquigarrow$
  - строчный стабилизатор $P_\lambda := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \colon \sigma$ сохраняет строки $T\}$.
  - столбцовый стаб. $Q_\lambda := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \colon \sigma$ сохраняет столбцы $T\} \subset \mathfrak{S}_n$.

  Очевидно, $P_\lambda \cap Q_\lambda = \{e\}$.
- Проекторы Юнга:
  - $a_\lambda := \frac{1}{\#P_\lambda} \sum\limits_{\sigma \in P_\lambda} \sigma$ и $b_\lambda := \frac{1}{\#Q_\lambda} \sum\limits_{\sigma \in Q_\lambda} (-1)^\sigma \sigma$,
- Симметризатор Юнга $c_\lambda := a_\lambda b_\lambda \in \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$. Очевидно, $c_\lambda \neq 0$.

Теорема (классический подход к ТПСГ)

1. $V_\lambda := \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\lambda$ *в* $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ *— неприводимое представление* $\mathfrak{S}_n$ *относительно левого умножения (модуль Шпехта).*
2. *Каждое неприводимое представление* $\mathfrak{S}_n$ *изоморфно* V_λ *для однозначно определенной диаграммы Юнга* λ*.*

Теорема (классический подход к ТПСГ)

1. *$V_\lambda := \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\lambda$ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ — неприводимое представление $\mathfrak{S}_n$ относительно левого умножения (модуль Шпехта).*
2. *Каждое неприводимое представление $\mathfrak{S}_n$ изоморфно V_λ для однозначно определенной диаграммы Юнга λ.*

Следствие

$S_\lambda :=$ образ c_λ в представлении $\mathfrak{S}_n$ в $V^{\otimes n}$ – проекция на изотипическую компоненту $L_\lambda \otimes V_\lambda$.

Теорема (классический подход к ТПСГ)

1. *$V_\lambda := \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_\lambda$ в $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ — неприводимое представление $\mathfrak{S}_n$ относительно левого умножения (модуль Шпехта).*
2. *Каждое неприводимое представление $\mathfrak{S}_n$ изоморфно V_λ для однозначно определенной диаграммы Юнга λ.*

Следствие

$S_\lambda :=$ образ c_λ в представлении $\mathfrak{S}_n$ в $V^{\otimes n}$ – проекция на изотипическую компоненту $L_\lambda \otimes V_\lambda$.

Примеры.

- $\lambda = (n) \implies P_\lambda = \mathfrak{S}_n,\ Q_\lambda = \{e\} \implies c_\lambda$ — симметризатор.
- $\lambda = (1^n) \implies Q_\lambda = \mathfrak{S}_n,\ P_\lambda = \{e\} \implies c_\lambda$ — антисимметризатор.
- $\lambda = (2,1) \implies P_\lambda = \{e,(12)\},\ Q_\lambda = \{e,(13)\} \implies$
  $c_\lambda = (e + (12))(e - (13)) = e + (12) - (13) - (123).$