Теория представлений симметрических групп

Лекция 14. Асимптотическая теория представлений. Бесконечная симметрическая группа. Теорема Тома

Н. В. Цилевич

3 декабря 2021 г.

Асимптотическая теория представлений

- Два (связанных между собой) типа вопросов:
  - асимптотическое поведение групп, когда ранг группы $\to \infty$;
  - свойства бесконечномерных аналогов классических групп.

Асимптотическая теория представлений

- Два (связанных между собой) типа вопросов:
  - асимптотическое поведение групп, когда ранг группы $\to \infty$;
  - свойства бесконечномерных аналогов классических групп.
- Систематически начата в работах А. М. Вершика и С. В. Керова в 1970-х гг.

Асимптотическая теория представлений

- Два (связанных между собой) типа вопросов:
  - асимптотическое поведение групп, когда ранг группы $\to \infty$;
  - свойства бесконечномерных аналогов классических групп.
- Систематически начата в работах А. М. Вершика и С. В. Керова в 1970-х гг.
- Трудность: предельная группа обычно "дикая", т.е. неприводимые представления не имеют разумной параметризации.

Асимптотическая теория представлений

- Два (связанных между собой) типа вопросов:
  - асимптотическое поведение групп, когда ранг группы $\to \infty$;
  - свойства бесконечномерных аналогов классических групп.
- Систематически начата в работах А. М. Вершика и С. В. Керова в 1970-х гг.
- Трудность: предельная группа обычно "дикая", т.е. неприводимые представления не имеют разумной параметризации.
- Выход: рассматривать фактор-представления или характеры.

Характеры

- Характер дискретной группы G – функция $\chi\colon G \to \mathbb{C}$:
  - $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \chi(g_i g_j^{-1}) z_i \bar{z}_j \geq 0$ (положительная определённость),
  - $\chi(gh) = \chi(hg)$ (центральность),
  - $\chi(e) = 1$ (нормированность).

Характеры

- Характер дискретной группы G – функция $\chi\colon G \to \mathbb{C}$:
  - $\sum_{i,j=1}^{n} \chi(g_i g_j^{-1}) z_i \bar{z}_j \geq 0$ (положительная определённость),
  - $\chi(gh) = \chi(hg)$ (центральность),
  - $\chi(e) = 1$ (нормированность).
- $\mathrm{Char}(G)$ – пространство характеров G (с топологией поточечной сходимости).
- Это выпуклый компакт $\implies$ можно рассмотреть его экстремальные точки = экстремальные характеры.
- $\mathcal{E}(G) := \mathrm{ex}\,\mathrm{Char}(G)$ – множество экстремальных характеров. Это аналог (нормированных) неприводимых характеров конечных групп.

Бесконечная симметрическая группа

- Бесконечная симметрическая группа $\mathfrak{S}_\infty :=$ группа финитных перестановок $\mathbb{N}$ = индуктивный предел (объединение) цепочки $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \dots$.
- Это
  - счётная дискретная группа,
  - аналог бесконечномерных классических групп,
  - "дикая" группа, т.е. неприводимые представления не допускают разумной параметризации.

Бесконечная симметрическая группа

- Бесконечная симметрическая группа $\mathfrak{S}_\infty :=$ группа финитных перестановок $\mathbb{N}$ = индуктивный предел (объединение) цепочки $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \dots$.
- Это
  - счётная дискретная группа,
  - аналог бесконечномерных классических групп,
  - "дикая" группа, т.е. неприводимые представления не допускают разумной параметризации.

Лемма

Классы сопряжённости в $\mathfrak{S}_\infty$ параметризуются диаграммами Юнга ν без частей равных 1.

Доказательство: очевидно (почему?).

Бесконечная симметрическая группа

- Бесконечная симметрическая группа $\mathfrak{S}_\infty$:= группа финитных перестановок $\mathbb{N}$ = индуктивный предел (объединение) цепочки $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \dots$.
- Это
  - счётная дискретная группа,
  - аналог бесконечномерных классических групп,
  - "дикая" группа, т.е. неприводимые представления не допускают разумной параметризации.

Лемма

Классы сопряжённости в $\mathfrak{S}_\infty$ параметризуются диаграммами Юнга ν без частей равных 1.

Доказательство: очевидно (почему?).

- $\mathfrak{S}_\infty \ni w \rightsquigarrow$ цикловый тип $\nu(w) = (2^{m_2} 3^{m_3} \dots)$.

- Задача: найти все экстремальные характеры $\mathfrak{S}_\infty$.
- Решение: Элмар Тома (Elmar Thoma), 1964; чисто аналитическая техника, неясен смысл параметров.
- Доказательство Вершика–Керова (1981): аппроксимативный подход, “эргодический метод”, наглядный смысл параметров.
- Впоследствии ещё много доказательств.

Теорема Тома: подготовка

- Симплекс Тома:

$$\Omega = \{(\alpha, \beta) \colon \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq 0, \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq 0, \sum_i (\alpha_i + \beta_i) \leq 1\}.$$

Это компактное метризуемое сепарабельное пространство (как замкнутое подмножество $[0,1]^\infty \times [0,1]^\infty$).

Теорема Тома: подготовка

- Симплекс Тома:

$$\Omega = \{(\alpha, \beta)\colon \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq 0, \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq 0, \sum_i (\alpha_i + \beta_i) \leq 1\}.$$

  Это компактное метризуемое сепарабельное пространство (как замкнутое подмножество $[0,1]^\infty \times [0,1]^\infty$).
- Иногда удобно считать, что $\Omega = \{(\alpha, \beta, \gamma)\}$, где $\gamma = 1 - \sum_i (\alpha_i + \beta_i) \geq 0$, т.е. $\sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i + \gamma = 1$.

Теорема Тома: подготовка

- Симплекс Тома:

$$\Omega = \{(\alpha,\beta)\colon \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq 0, \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq 0, \sum_i (\alpha_i + \beta_i) \leq 1\}.$$

  Это компактное метризуемое сепарабельное пространство (как замкнутое подмножество $[0,1]^\infty \times [0,1]^\infty$).

- Иногда удобно считать, что $\Omega = \{(\alpha,\beta,\gamma)\}$, где $\gamma = 1 - \sum_i (\alpha_i + \beta_i) \geq 0$, т.е. $\sum_i \alpha_i + \sum_i \beta_i + \gamma = 1$.

- Суперсимметрические степенные суммы от двух наборов переменных:
  - $p_n^\circ(x,y) := \sum_i x_i^n + (-1)^{n+1} \sum_i y_i^n$, $n \geq 2$;
  - $p_\nu^\circ(x,y) := \prod_{i\geq 2} (p_i^\circ(x,y))^{m_i}$ для $\nu = (2^{m_2} 3^{m_3} \ldots)$.

Теорема Тома

Теорема (теорема Тома)

Множество экстремальных характеров $\mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ гомеоморфно Ω.
Для $\chi_{\alpha,\beta} \in \mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ и $w \in \mathfrak{S}_\infty$ с цикловым типом $\nu = (2^{m_2}3^{m_3}\dots)$ имеем

$$\boxed{\chi_{\alpha,\beta}(w) = p^\circ_\nu(\alpha,\beta) = \prod_{i\geq 2}\Big(\sum_i x_i^n + (-1)^{n+1}\sum_i y_i^n\Big)^{m_i}}.$$

- α, β – параметры Тома.

Теорема Тома

Теорема (теорема Тома)

Множество экстремальных характеров $\mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ гомеоморфно Ω.
Для $\chi_{\alpha,\beta} \in \mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ и $w \in \mathfrak{S}_\infty$ с цикловым типом $\nu = (2^{m_2} 3^{m_3} \ldots)$ имеем

$$\boxed{\chi_{\alpha,\beta}(w) = p^\circ_\nu(\alpha,\beta) = \prod_{i\geq 2} \Big(\sum_i x_i^n + (-1)^{n+1} \sum_i y_i^n \Big)^{m_i}}.$$

- α, β – параметры Тома.

Таким образом, по сравнению с конечными группами ответ
- сложнее, так как диаграммы Юнга $\rightsquigarrow$ точки бесконечномерного симплекса;
- проще, так как характер задаётся простой мультипликативной формулой.

Схема доказательства Тома: вполне положительность

- Матрица вполне положительна $\iff$ все конечные миноры ≥ 0.
- Последовательность $(h_n)_{n\geq 0}$ вполне положительна $\iff$ тёплицева матрица
$$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$
вполне положительна.
- Формальный ряд $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$ вполне положителен $\iff$ последовательность $(h_n)_{n\geq 0}$ вполне положительна.

Схема доказательства Тома: вполне положительность

- Матрица вполне положительна $\iff$ все конечные миноры ≥ 0.
- Последовательность $(h_n)_{n\geq 0}$ вполне положительна $\iff$ тёплицева матрица
$$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$
вполне положительна.
- Формальный ряд $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$ вполне положителен $\iff$ последовательность $(h_n)_{n\geq 0}$ вполне положительна.
- Теорема Шёнберга–Эдреи: $\{$вполне положительные ряды с $H(0) = 1\}$ = ряды Тейлора мероморфных функций вида
$$H(z) = e^{\gamma z} \prod_i \frac{1 + \beta_i z}{1 - \alpha_i z}, \qquad (\alpha, \beta) \in \Omega.$$

Схема доказательства Тома

- Теорема мультипликативности: характер $\chi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty)$ экстремален $\iff$ он мультипликативен: если $w = w_1 w_2 \ldots$ – разложение на перестановки с дизъюнктными носителями, то $\chi(w) = \chi(w_1)\chi(w_2)\ldots$.
- Таким образом, экстремальные характеры задаются значениями $p_n := \chi((12\ldots n))$ на одноцикловых перестановках.

Схема доказательства Тома

- Теорема мультипликативности: характер $\chi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty)$ экстремален $\iff$ он мультипликативен: если $w = w_1 w_2 \dots$ – разложение на перестановки с дизъюнктными носителями, то $\chi(w) = \chi(w_1)\chi(w_2)\dots$.
- Таким образом, экстремальные характеры задаются значениями $p_n := \chi((12\dots n))$ на одноцикловых перестановках.
- Положим $R(z) := \sum_{n=1}^{n} \frac{p_n z^n}{n}$, $H(z) = e^{R(z)}$ (слушатели курса по симметрическим функциям, узнаёте?).

Схема доказательства Тома

- Теорема мультипликативности: характер $\chi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty)$ экстремален $\iff$ он мультипликативен: если $w = w_1 w_2 \dots$ – разложение на перестановки с дизъюнктными носителями, то $\chi(w) = \chi(w_1)\chi(w_2)\dots$.
- Таким образом, экстремальные характеры задаются значениями $p_n := \chi((12\dots n))$ на одноцикловых перестановках.
- Положим $R(z) := \sum_{n=1}^{n} \frac{p_n z^n}{n}$, $H(z) = e^{R(z)}$.
- Теорема вполне положительности: ряд $R(z)$ задаёт экстремальный характер $\iff$ ряд $H(z)$ вполне положителен.

Схема доказательства Тома

- Теорема мультипликативности: характер $\chi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty)$ экстремален $\iff$ он мультипликативен: если $w = w_1 w_2 \ldots$ – разложение на перестановки с дизъюнктными носителями, то $\chi(w) = \chi(w_1)\chi(w_2)\ldots$.
- Таким образом, экстремальные характеры задаются значениями $p_n := \chi((12\ldots n))$ на одноцикловых перестановках.
- Положим $R(z) := \sum\limits_{n=1}^{n} \frac{p_n z^n}{n}$, $H(z) = e^{R(z)}$.
- Теорема вполне положительности: ряд $R(z)$ задаёт экстремальный характер $\iff$ ряд $H(z)$ вполне положителен.
- Теорема Шёнберга–Эдреи $\implies$ $H(z) = e^{\gamma z} \prod\limits_i \frac{1+\beta_i z}{1-\alpha_i z}$, $(\alpha, \beta) \in \Omega$.

Схема доказательства Тома

- Теорема мультипликативности: характер $\chi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty)$ экстремален $\iff$ он мультипликативен: если $w = w_1 w_2 \dots$ – разложение на перестановки с дизъюнктными носителями, то $\chi(w) = \chi(w_1)\chi(w_2)\dots$.
- Таким образом, экстремальные характеры задаются значениями $p_n := \chi((12\dots n))$ на одноцикловых перестановках.
- Положим $R(z) := \sum\limits_{n=1}^{n} \frac{p_n z^n}{n}$, $H(z) = e^{R(z)}$.
- Теорема вполне положительности: ряд $R(z)$ задаёт экстремальный характер $\iff$ ряд $H(z)$ вполне положителен.
- Теорема Шёнберга–Эдреи $\implies$ $H(z) = e^{\gamma z} \prod\limits_i \frac{1+\beta_i z}{1-\alpha_i z}$, $(\alpha, \beta) \in \Omega$.
- $R(z) = \ln H(z) = \gamma z - \sum\limits_i \ln(1 - \alpha_i z) + \sum\limits_i \ln(1 + \beta_i z) \implies$ $p_n = p_n^\circ(\alpha, \beta)$.

Схема доказательства Тома

- Теорема мультипликативности: характер $\chi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty)$ экстремален $\iff$ он мультипликативен: если $w = w_1 w_2 \ldots$ – разложение на перестановки с дизъюнктными носителями, то $\chi(w) = \chi(w_1)\chi(w_2)\ldots$.
- Таким образом, экстремальные характеры задаются значениями $p_n := \chi((12\ldots n))$ на одноцикловых перестановках.
- Положим $R(z) := \sum_{n=1}^{n} \frac{p_n z^n}{n}$, $H(z) = e^{R(z)}$.
- Теорема вполне положительности: ряд $R(z)$ задаёт экстремальный характер $\iff$ ряд $H(z)$ вполне положителен.
- Теорема Шёнберга–Эдреи $\implies$ $H(z) = e^{\gamma z} \prod_i \frac{1+\beta_i z}{1-\alpha_i z}$, $(\alpha, \beta) \in \Omega$.
- $R(z) = \ln H(z) = \gamma z - \sum_i \ln(1-\alpha_i z) + \sum_i \ln(1+\beta_i z) \implies$ $p_n = p_n^\circ(\alpha, \beta)$.

Таким образом, смысл параметров Тома α, β – нули и полюса какой-то мероморфной функции... Непонятно...

Гармонические функции на графе Юнга

- $\phi : \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$ – гармоническая $\iff$ $\boxed{\phi(\lambda) = \sum_{\Lambda : \lambda \nearrow \Lambda} \phi(\Lambda)}$

  для любой $\lambda \in \mathbb{Y}$.

Гармонические функции на графе Юнга

- $\phi : \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$ – гармоническая $\iff$ $\boxed{\phi(\lambda) = \sum_{\Lambda : \lambda \nearrow \Lambda} \phi(\Lambda)}$ для любой $\lambda \in \mathbb{Y}$.
- Нормированный характер $\mathfrak{S}_n$ – нормируем на размерность, т.е. нормировка $\chi(e) = 1$.

Гармонические функции на графе Юнга

- $\phi : \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$ – гармоническая $\iff$ $\boxed{\phi(\lambda) = \sum_{\Lambda : \lambda \nearrow \Lambda} \phi(\Lambda)}$ для любой $\lambda \in \mathbb{Y}$.
- Нормированный характер $\mathfrak{S}_n$ – нормируем на размерность, т.е. нормировка $\chi(e) = 1$.
- $\chi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty) \implies \chi_n := \chi|_{\mathfrak{S}_n}$ – нормированный характер $\mathfrak{S}_n$.

Гармонические функции на графе Юнга

- $\phi : \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$ – гармоническая $\iff$ $\boxed{\phi(\lambda) = \sum\limits_{\Lambda : \lambda \nearrow \Lambda} \phi(\Lambda)}$

  для любой $\lambda \in \mathbb{Y}$.
- Нормированный характер $\mathfrak{S}_n$ – нормируем на размерность, т.е. нормировка $\chi(e) = 1$.
- $\chi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty) \implies \chi_n := \chi|_{\mathfrak{S}_n}$ – нормированный характер $\mathfrak{S}_n$.

Теорема

Характеры $\mathfrak{S}_\infty \iff$ гармонические функции на $\mathbb{Y}$ с $\phi(\emptyset) = 1$:

$$\boxed{\chi_n = \sum_{\lambda \vdash n} \phi(\lambda) \chi^\lambda}.$$

- Harm($\mathbb{Y}$) – пространство гармонических функций с $\phi(\emptyset) = 1$.

Доказательство

- $\chi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty) \implies \chi_n$ – нормированный характер $\implies$ раскладывается по нормированным неприводимым характерам: $\chi_n = \sum\limits_{\lambda \vdash n} c_\lambda \frac{\chi^\lambda}{\dim \lambda} = \sum\limits_{\lambda \vdash n} \phi(\lambda) \chi^\lambda$, где $\phi(\lambda) = \frac{c_\lambda}{\dim \lambda}$.

Доказательство

- $\chi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty) \implies \chi_n$ – нормированный характер $\implies$ раскладывается по нормированным неприводимым характерам: $\chi_n = \sum\limits_{\lambda \vdash n} c_\lambda \frac{\chi^\lambda}{\dim \lambda} = \sum\limits_{\lambda \vdash n} \phi(\lambda)\chi^\lambda$, где $\phi(\lambda) = \frac{c_\lambda}{\dim \lambda}$.
- $\sum\limits_{\lambda \vdash n} \phi(\lambda)\chi^\lambda = \chi_n = \chi_{n+1}|_{\mathfrak{S}_n} = \sum\limits_{\Lambda \vdash n+1} \phi(\Lambda)\chi^\Lambda|_{\mathfrak{S}_n} =$
  $= \sum\limits_{\Lambda \vdash n+1} \phi(\Lambda) \sum\limits_{\lambda : \lambda \nearrow \Lambda} \chi^\lambda = \sum\limits_{\lambda \vdash n} \chi^\lambda \sum\limits_{\Lambda : \lambda \nearrow \Lambda} \phi(\Lambda) \implies \phi$ – гармоническая.

Доказательство

- $\chi \in \mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty) \implies \chi_n$ – нормированный характер $\implies$ раскладывается по нормированным неприводимым характерам: $\chi_n = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda \frac{\chi^\lambda}{\dim \lambda} = \sum_{\lambda \vdash n} \phi(\lambda)\chi^\lambda$, где $\phi(\lambda) = \frac{c_\lambda}{\dim \lambda}$.
- $\sum_{\lambda \vdash n} \phi(\lambda)\chi^\lambda = \chi_n = \chi_{n+1}|_{\mathfrak{S}_n} = \sum_{\Lambda \vdash n+1} \phi(\Lambda)\chi^\Lambda|_{\mathfrak{S}_n} =$
  $= \sum_{\Lambda \vdash n+1} \phi(\Lambda) \sum_{\lambda : \lambda \nearrow \Lambda} \chi^\lambda = \sum_{\lambda \vdash n} \chi^\lambda \sum_{\Lambda : \lambda \nearrow \Lambda} \phi(\Lambda) \implies \phi$ – гармоническая.
- В обратную сторону – аналогично ($\bigstar$) .

Центральные меры на графе Юнга

- $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$ – пространство путей в графе Юнга (= бесконечных стандартных таблиц).
- Будем рассматривать вероятностные (борелевские) меры на $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$.

Центральные меры на графе Юнга

- $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$ – пространство путей в графе Юнга (= бесконечных стандартных таблиц).
- Будем рассматривать вероятностные (борелевские) меры на $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$.
- $[t]_n :=$ начальный кусок пути t до n-го этажа.
- $u \in \mathbb{T}_n(\mathbb{Y}) \rightsquigarrow$ цилиндрическое множество $C_u := \{t \in \mathbb{T}(\mathbb{Y}) : [t]_n = u\}$.

Центральные меры на графе Юнга

- $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$ – пространство путей в графе Юнга (= бесконечных стандартных таблиц).
- Будем рассматривать вероятностные (борелевские) меры на $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$.
- $[t]_n :=$ начальный кусок пути t до n-го этажа.
- $u \in \mathbb{T}_n(\mathbb{Y}) \rightsquigarrow$ цилиндрическое множество $C_u := \{t \in \mathbb{T}(\mathbb{Y}) : [t]_n = u\}$.
- Мера M на $\mathbb{T}(\mathbb{Y}) \rightsquigarrow$ цилиндрические распределения M_n на $\mathbb{T}_n(\mathbb{Y})$: $M_n(u) := M(C_u)$ для $u \in \mathbb{T}_n(\mathbb{Y})$.

Центральные меры на графе Юнга

- $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$ – пространство путей в графе Юнга (= бесконечных стандартных таблиц).
- Будем рассматривать вероятностные (борелевские) меры на $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$.
- $[t]_n :=$ начальный кусок пути t до n-го этажа.
- $u \in \mathbb{T}_n(\mathbb{Y}) \rightsquigarrow$ цилиндрическое множество $C_u := \{t \in \mathbb{T}(\mathbb{Y}) : [t]_n = u\}$.
- Мера M на $\mathbb{T}(\mathbb{Y}) \rightsquigarrow$ цилиндрические распределения M_n на $\mathbb{T}_n(\mathbb{Y})$: $M_n(u) := M(C_u)$ для $u \in \mathbb{T}_n(\mathbb{Y})$.
- Мера на $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$ центральна $\iff M_n(u) = M_n(v)$ для любых двух путей u, v от $\emptyset$ до одной и той же вершины $\lambda \in \mathbb{Y}_n$.
- $\mathrm{Cent}(\mathbb{Y})$ – пространство вероятностных центральных мер на $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$.

Центральные меры и гармонические функции

Теорема

$\mathrm{Harm}(\mathbb{Y}) \simeq \mathrm{Cent}(\mathbb{Y})$.

Теорема

$\mathrm{Harm}(\mathbb{Y}) \simeq \mathrm{Cent}(\mathbb{Y})$.

Доказательство.

- $M \in \mathrm{Cent}(\mathbb{Y}) \rightsquigarrow \phi(\lambda) := M_n(u)$, где $\mathrm{sh}(u) = \lambda$. Это гармоническая функция (почему?).

Центральные меры и гармонические функции

Теорема

$\mathrm{Harm}(\mathbb{Y}) \simeq \mathrm{Cent}(\mathbb{Y})$.

Доказательство.

- $M \in \mathrm{Cent}(\mathbb{Y}) \rightsquigarrow \phi(\lambda) := M_n(u)$, где $\mathrm{sh}(u) = \lambda$. Это гармоническая функция (почему?).
- $\phi \in \mathrm{Harm}(\mathbb{Y}) \rightsquigarrow M_n(u) := \phi(\mathrm{sh}(u))$.
  - Согласованность цилиндрических мер – по гармоничности.
  - Далее – версия теоремы Колмогорова.
  - Центральность – по определению.

Центральные меры и гармонические функции

Теорема

$\mathrm{Harm}(\mathbb{Y}) \simeq \mathrm{Cent}(\mathbb{Y})$.

- Хвостовое отношение эквивалентности ξ на $\mathbb{T}(\mathbb{Y})$:
  $u \sim_\xi v \iff$ пути совпадают с некоторого места.
- Мера M эргодична относительно $\xi \iff$ для любого $A \subset \mathbb{T}(\mathbb{Y})$, состоящего из целых классов ξ, мера A равна 0 или 1.
- Экстремальные точки $\mathrm{Cent}(\mathbb{Y})$ = эргодические меры относительно хвостового отношения эквивалентности.

Итак, мы имеем три эквивалентных множества:

- множество характеров $\mathrm{Char}(\mathfrak{S}_\infty)$,
- множество гармонических функций $\mathrm{Harm}(\mathbb{Y})$,
- множество центральных мер $\mathrm{Cent}(\mathbb{Y})$.

Это выпуклые компакты. Хотим описать их экстремальные точки.