Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 14. Бозон-фермионное соответствие

Н. В. Цилевич

3 декабря 2021 г.

Бесконечное клин-пространство (infinite wedge space)

- V — линейное пространство с базисом $\{\underline{k}\}_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}}$.
- $S \subset \mathbb{Z}+\frac{1}{2} \rightsquigarrow$
  - $S_+ := S \setminus \{\mathbb{Z}_{\leq 0} - \frac{1}{2}\}$ – множество положительных элементов в S;
  - $S_- := \{\mathbb{Z}_{\leq 0} - \frac{1}{2}\} \setminus S$ – множество отрицательных элементов вне S
- Физическая интерпретация – море Дирака:
  - S_+ – электроны,
  - S_- – дырки (позитроны).

Бесконечное клин-пространство (infinite wedge space)

- V — линейное пространство с базисом $\{\underline{k}\}_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}}$.
- $S \subset \mathbb{Z}+\frac{1}{2} \rightsquigarrow$
  - $S_+ := S \setminus \{\mathbb{Z}_{\leq 0} - \frac{1}{2}\}$ – множество положительных элементов в S;
  - $S_- := \{\mathbb{Z}_{\leq 0} - \frac{1}{2}\} \setminus S$ – множество отрицательных элементов вне S
- Физическая интерпретация – море Дирака:
  - S_+ – электроны,
  - S_- – дырки (позитроны).
- Бесконечное клин-пространство (фермионное пространство Фока) $\mathcal{F} := \{v_S = \underline{s_1} \wedge \underline{s_2} \wedge \ldots\}$, где $S \subset \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ такое, что S_+ и S_- конечны.
- v_S – полубесконечные мономы.
- Скалярное произведение в $\mathcal{F}$: $\{v_S\}$ – ортонормированный базис.

Свободные фермионы

- Свободные фермионы $\psi_k, \psi_k^*\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$:
  - $\psi_k(f) := \underline{k} \wedge f$;
  - ψ_k^* – сопряжённый оператор (= с точностью до знака вычёркивание $\underline{k}$) (формула?).
  - ψ_k при $k > 0$ и ψ_k^* при $k < 0$ – операторы рождения.
  - ψ_k^* при $k > 0$ и ψ_k при $k < 0$ – операторы уничтожения.

Свободные фермионы

- Свободные фермионы $\psi_k, \psi_k^*\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$:
  - $\psi_k(f) := \underline{k} \wedge f$;
  - ψ_k^* – сопряжённый оператор (= с точностью до знака вычёркивание $\underline{k}$) (формула?).
  - ψ_k при $k > 0$ и ψ_k^* при $k < 0$ – операторы рождения.
  - ψ_k^* при $k > 0$ и ψ_k при $k < 0$ – операторы уничтожения.
- Вакуумный вектор: $\Omega = \Omega_0 := \underline{-\frac{1}{2}} \wedge \underline{-\frac{3}{2}} \wedge \dots$.
  - Операторы уничтожения переводят Ω в 0.
  - $\mathcal{F}$ порождается действием операторов рождения на Ω.

Канонические антикоммутационные соотношения

- Антикоммутатор $\{X, Y\} := XY + YX$.

Предложение

$\{\psi_m, \psi_n\} = 0$, $\{\psi_m^*, \psi_n^*\} = 0$, $\{\psi_m^*, \psi_n\} = \delta_{mn}$.

Доказательство: (★) .

- Это канонические антикоммутационные соотношения (CAR).

Канонические антикоммутационные соотношения

- Антикоммутатор $\{X, Y\} := XY + YX$.

Предложение

$\{\psi_m, \psi_n\} = 0$, $\{\psi_m^*, \psi_n^*\} = 0$, $\{\psi_m^*, \psi_n\} = \delta_{mn}$.

Доказательство: (★) .

- Это канонические антикоммутационные соотношения (CAR).

Предложение

$$\psi_k \psi_k^* v_S = \begin{cases} v_S, & k \in S, \\ 0, & k \notin S. \end{cases}$$

Доказательство: очевидно.

Заряд и энергия

- Нормально упорядоченное произведение:

$$:\psi_k\psi_k^*: := \begin{cases} \psi_k\psi_k^*, & k > 0, \\ -\psi_k^*\psi_k, & k < 0. \end{cases}$$

Заряд и энергия

- Нормально упорядоченное произведение:
$$: \psi_k \psi_k^* := \begin{cases} \psi_k \psi_k^*, & k > 0, \\ -\psi_k^* \psi_k, & k < 0. \end{cases}$$
- Оператор заряда: $\boxed{C = \sum_k : \psi_k \psi_k^* :}$ (элемент из S_+ вносит вклад 1, элемент из S_- – вклад -1).
Таким образом, $C v_S = (|S_+| - |S_-|) v_S$.

Заряд и энергия

- Нормально упорядоченное произведение:
$$:\psi_k\psi_k^*: := \begin{cases} \psi_k\psi_k^*, & k>0, \\ -\psi_k^*\psi_k, & k<0. \end{cases}$$
- Оператор заряда: $\boxed{C = \sum_k :\psi_k\psi_k^*:}$ (элемент из S_+ вносит вклад 1, элемент из S_- – вклад -1).
Таким образом, $Cv_S = (|S_+| - |S_-|)v_S$.
- Оператор энергии: $\boxed{H = \sum_k k :\psi_k\psi_k^*:}$ (элемент k из S_+ вносит вклад k, элемент k из S_- – вклад $-k$; в частности, энергия неотрицательна; когда она 0?).

Заряд и энергия

- Нормально упорядоченное произведение:
  $$:\psi_k\psi_k^*: := \begin{cases} \psi_k\psi_k^*, & k > 0, \\ -\psi_k^*\psi_k, & k < 0. \end{cases}$$
- Оператор заряда: $\boxed{C = \sum_k :\psi_k\psi_k^*:}$ (элемент из S_+ вносит вклад 1, элемент из S_- – вклад -1).
  Таким образом, $Cv_S = (|S_+| - |S_-|)v_S$.
- Оператор энергии: $\boxed{H = \sum_k k :\psi_k\psi_k^*:}$ (элемент k из S_+ вносит вклад k, элемент k из S_- – вклад $-k$; в частности, энергия неотрицательна; когда она 0?).
- Оператор сдвига: $R(\underline{s_1} \wedge \underline{s_2} \wedge \ldots) = \underline{s_1 + 1} \wedge \underline{s_2 + 2} \wedge \ldots$.

Лемма (действие сдвига на заряд и энергию)

$R\psi_k R^{-1} = \psi_{k+1}$, $R\psi_k^* R^{-1} = \psi_{k+1}^*$.

Доказательство: очевидно (почему?).

Лемма (действие сдвига на заряд и энергию)

$R\psi_k R^{-1} = \psi_{k+1}$, $R\psi_k^* R^{-1} = \psi_{k+1}^*$.

Следствие

$1)\ R^{-k} C R^k = C + k, \quad 2)\ R^{-k} H R^k = H + kC + k^2/2.$

Доказательство.

1) Что-то меняется для k чисел $i = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \dots, -\frac{2k-1}{2}$. Среди них было m дырок $\implies$ был вклад $-m$, стал вклад $k - m$.
2) $(\bigstar)$.

Лемма (действие сдвига на заряд и энергию)

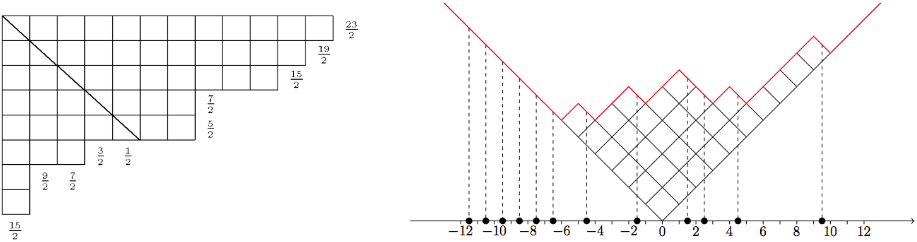
$R\psi_k R^{-1} = \psi_{k+1}$, $R\psi_k^* R^{-1} = \psi_{k+1}^*$.

Следствие

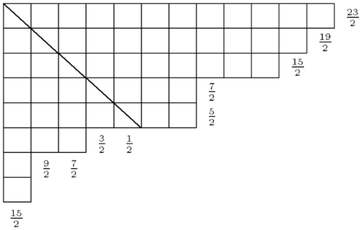
1) $R^{-k} C R^k = C + k$, 2) $R^{-k} H R^k = H + kC + k^2/2$.

- $\mathcal{F}_k := \{v \in \mathcal{F} \colon Cv = kv\}$ – пространство заряда k.
- Очевидно, $\mathcal{F}_k = R^k \mathcal{F}_0$ (почему?).
- Имеем разложение по зарядам $\boxed{\mathcal{F} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_k}$.

- $\Pi \ni \lambda \mapsto S(\lambda) := \{\lambda_i - i + \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ – модифицированные координаты Фробениуса:

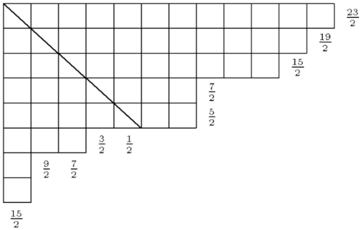


- Получаем отображение $\lambda \mapsto v_{S(\lambda)} =: v_\lambda$ из Π в $\mathcal{F}$.



Предложение

Это биекция между Π *и полубесконечными мономами нулевого заряда.*



Предложение

Это биекция между Π *и полубесконечными мономами нулевого заряда.*

Доказательство.

- Если d – длина диагонали λ, то в $S(\lambda)$ имеется d электронов и d дырок $\implies$ полный заряд $= 0$.
- Любой такой моном $\rightsquigarrow$ диаграмма, как на рисунке.

Предложение

Это биекция между Π *и полубесконечными мономами нулевого заряда.*

Итак, имеем взаимно обратные отображения $\lambda \mapsto v_\lambda$ и $\phi \mapsto \lambda_\phi$ между диаграммами Юнга и мономами нулевого заряда.

- $\mathcal{F}_0 =$ линейная оболочка $\{v_\lambda\}_{\lambda \in \Pi}$.
- $\Omega = v_\emptyset$.
- $Hv_\lambda = |\lambda| v_\lambda$ (почему?). Таким образом, v_λ – моном заряда 0 и энергии $|\lambda|$. В частности, $Hv_\emptyset = 0$.

Бозонизация

- Свободные бозоны: $\boxed{a_n := \sum_{k \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_{k-n}\psi_k^*}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;

Бозонизация

- Свободные бозоны: $\boxed{a_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_{k-n}\psi_k^*}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; $a_0 = C$.

Бозонизация

- Свободные бозоны: $\boxed{a_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_{k-n}\psi_k^*}$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$; $a_0 = C$.

Лемма

$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$, $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.

Доказательство: банальная проверка.

Бозонизация

- Свободные бозоны: $\boxed{a_n := \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_{k-n}\psi_k^*}$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$; $a_0 = C$.

Лемма

$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$, $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.

Лемма (коммутирование между бозонами и фермионами)

$\boxed{[a_n, \psi_m] = \psi_{m-n}}$, $\boxed{[a_n, \psi_m^*] = -\psi_{m+n}^*}$.

Доказательство.

- $$[a_n, \psi_m] = \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} [\psi_{k-n}\psi_k^*, \psi_m] = \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} (\psi_{k-n}\{\psi_k^*, \psi_m\} - \{\psi_{k-n}, \psi_m\}\psi_k^*) = \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} (\psi_{k-n}\delta_{km} - 0) = \psi_{m-n}.$$
- Второе соотношение – аналогично.

Предложение (канонические коммутационные соотношения)

1) $a_n^* = a_{-n}$; 2) $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$.

Предложение (канонические коммутационные соотношения)

1) $a_n^* = a_{-n}$; 2) $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$.

Доказательство.

- $a_n^* = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_k \psi_{k-n}^* = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_{\ell+n}\psi_\ell^* = a_{-n}$.

Предложение (канонические коммутационные соотношения)

1) $a_n^* = a_{-n}$; 2) $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$.

Доказательство.

- $a_n^* = \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_k \psi_{k-n}^* = \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} \psi_{\ell+n}\psi_\ell^* = a_{-n}$.
- $[a_n, a_m] = \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} [a_n, \psi_{k-m}\psi_k^*] =$

  $= \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} ([a_n, \psi_{k-m}]\psi_k^* + \psi_{k-m}[a_n, \psi_k^*]) =$

  $= \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} (\psi_{k-m-n}\psi_k^* - \psi_{k-m}\psi_{n+k}^*) =: A$.

  - $m + n \neq 0 \implies A = a_{m+n} - a_{m+n} = 0$.
  - $m + n = 0 \implies A = \sum_{k\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}} (\psi_k\psi_k^* - \psi_{k+n}\psi_{k+n}^*)$.

    Положим $\Phi_k =: \psi_k\psi_k^* : \implies A = \sum_{k>0} (\Phi_k - \Phi_{k+n}) +$

    $+ \sum_{k<-n} ((\Phi_k + 1) - (\Phi_{k+n} + 1)) + \sum_{k=-n+\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} ((\Phi_k + 1) - \Phi_{k+n}) = nE$.

Предложение (канонические коммутационные соотношения)

1) $a_n^* = a_{-n}$;   2) $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$.

- Это канонические коммутационные соотношения (CCR).
  (Помните, они уже у нас встречались? Для операторов M_{p_n} и $p_n^\perp$ в Λ.)

Предложение (канонические коммутационные соотношения)

1) $a_n^* = a_{-n}$;   2) $[a_n, a_m] = n\delta_{n+m,0}$.

- Это канонические коммутационные соотношения (CCR). (Помните, они уже у нас встречались? Для операторов M_{p_n} и $p_n^\perp$ в Λ.)
- Соответствующая алгебра – алгебра Гейзенберга $\mathcal{H}$.
- Таким образом, в фермионном пространстве Фока $\mathcal{F}$ имеем представление алгебры Гейзенберга.

Бозонное пространство Фока

- Бозонное пространство Фока $\mathcal{B} := \mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots, q, q^{-1}]$.
- Скалярное произведение: все мономы ортогональны и $\|q^k \prod_i t_i^{m_i}\|^2 = \prod_i i^{m_i} m_i!$ (узнаёте?).

Бозонное пространство Фока

- Бозонное пространство Фока $\mathcal{B} := \mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots, q, q^{-1}]$.
- Скалярное произведение: все мономы ортогональны и $\|q^k \prod_i t_i^{m_i}\|^2 = \prod_i i^{m_i} m_i!$ (узнаёте?).
- Разложение по зарядам: $\mathcal{B} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_m$, где $\mathcal{B}_m = q^m \mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots] = q^m \mathcal{B}_0$.

Бозонное пространство Фока

- Бозонное пространство Фока $\mathcal{B} := \mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots, q, q^{-1}]$.
- Скалярное произведение: все мономы ортогональны и $\|q^k \prod_i t_i^{m_i}\|^2 = \prod_i i^{m_i} m_i!$ (узнаёте?).
- Разложение по зарядам: $\mathcal{B} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_m$, где $\mathcal{B}_m = q^m \mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots] = q^m \mathcal{B}_0$.
- $1_m = q^m$ – вакуумный вектор в $\mathcal{B}_m$.
  В частности, 1 – вакуумный вектор в $\mathcal{B}_0$ и $1_m = q^m \cdot 1$.

Свободные бозоны

Бозонные операторы:

- $\alpha_{-n} :=$ (умножение на) t_n при $n > 0$ (операторы рождения),
- $\alpha_n := n\frac{\partial}{\partial t_n}$ при $n > 0$ (операторы уничтожения),
- $\alpha_0 := q\frac{\partial}{\partial q}$ (оператор заряда: $\alpha_0 f = mf$ при $f \in \mathcal{B}_m$).

Свободные бозоны

Бозонные операторы:

- $\alpha_{-n} :=$ (умножение на) t_n при $n > 0$ (операторы рождения),
- $\alpha_n := n\frac{\partial}{\partial t_n}$ при $n > 0$ (операторы уничтожения),
- $\alpha_0 := q\frac{\partial}{\partial q}$ (оператор заряда: $\alpha_0 f = mf$ при $f \in \mathcal{B}_m$).

Лемма

$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{m+n,0}$.

Свободные бозоны

Бозонные операторы:

- $\alpha_{-n} :=$ (умножение на) t_n при $n > 0$ (операторы рождения),
- $\alpha_n := n\frac{\partial}{\partial t_n}$ при $n > 0$ (операторы уничтожения),
- $\alpha_0 := q\frac{\partial}{\partial q}$ (оператор заряда: $\alpha_0 f = mf$ при $f \in \mathcal{B}_m$).

Лемма

$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{m+n,0}.$

Доказательство.

- Для $m + n \neq 0$ очевидно.
- $[\alpha_n, \alpha_{-n}](t_n^k f) = n\frac{\partial}{\partial t_n}(t_n^{k+1} f) - nt_n\frac{\partial}{\partial t_n}(t_n^k f) =$
  $= n(k+1)t_n^k f - nkt_n^k f = nt_n^k f.$

Свободные бозоны

Бозонные операторы:

- $\alpha_{-n} :=$ (умножение на) t_n при $n > 0$ (операторы рождения),
- $\alpha_n := n\frac{\partial}{\partial t_n}$ при $n > 0$ (операторы уничтожения),
- $\alpha_0 := q\frac{\partial}{\partial q}$ (оператор заряда: $\alpha_0 f = mf$ при $f \in \mathcal{B}_m$).

Лемма

$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{m+n,0}$.

Таким образом, в $\mathcal{B}$ тоже имеем представление алгебры Гейзенберга!

- Любой оператор уничтожения переводит вакуумный вектор в 0.
- $\mathcal{B}_m$ порождается действием операторов рождения на вакуумный вектор: $\mathcal{B}_m = \mathcal{H} \cdot 1_m$.
- Следовательно, $\mathcal{B}_m$ – неприводимое представление $\mathcal{H}$, и разложение .$\mathcal{B} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{B}_m$ по зарядам – разложение на неприводимые.

Бозон-фермионное соответствие

- Напоминание: $\mathcal{F} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_m$ – разложение по зарядам.
- $\Omega_m := R^m\Omega = \underline{m-\frac{1}{2}} \wedge \underline{m-\frac{3}{2}} \wedge \ldots$ – вакуумный вектор в $\mathcal{F}_m$.

Бозон-фермионное соответствие

- Напоминание: $\mathcal{F} = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_m$ – разложение по зарядам.
- $\Omega_m := R^m\Omega = \underline{m-\frac{1}{2}} \wedge \underline{m-\frac{3}{2}} \wedge \ldots$ – вакуумный вектор в $\mathcal{F}_m$.

Теорема (бозон-фермионное соответствие)

- *Существует единственный изоморфизм $\sigma\colon \mathcal{F} \to \mathcal{B}$ представлений алгебры Гейзенберга, при котором $\sigma(\Omega_m) = q^m$.*
- *При этом изоморфизме моном $\phi \in \mathcal{F}_0$ переходит в многочлен $s_{\lambda_\phi}(t) \in \mathcal{B}$, где функция Шура понимается как многочлен от степенных сумм p_k.*

Бозон-фермионное соответствие

Теорема (бозон-фермионное соответствие)

- *Существует единственный изоморфизм* $\sigma\colon \mathcal{F} \to \mathcal{B}$ *представлений алгебры Гейзенберга, при котором* $\sigma(\Omega_m) = q^m$.
- *При этом изоморфизме моном* $\phi \in \mathcal{F}_0$ *переходит в многочлен* $s_{\lambda_\phi}(t) \in \mathcal{B}$, *где функция Шура понимается как многочлен от степенных сумм* p_k.

При этом

- $\phi \in \mathcal{F}_m \implies \phi = R^m \phi_0$, где $\phi_0 \in \mathcal{F}_0 \implies \sigma(\phi) = q^m s_{\lambda_{\phi_0}}(t)$.
- $\sigma(\mathcal{F}_m) = q^m \mathbb{C}[t_1, t_2, \dots] = \mathcal{B}_m$, т.е. разложение по зарядам сохраняется. В частности, $\mathcal{F}_m$ – неприводимые представления $\mathcal{H}$.
- Оператор сдвига R переходит в умножение на q.

А вот наконец и симметрические функции!

- Отождествим пространство нулевого заряда $B_0 = \mathbb{C}[t_1, t_2, \ldots]$ с алгеброй симметрических функций $\Lambda = \Lambda(x)$: $\boxed{p_k \leftrightarrow t_k}$.
- $\mathcal{B} = \Lambda((q)) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^m \Lambda.$
- Тогда $\boxed{a_n = p_n^{\perp}}$, $\boxed{a_{-n} = M_{p_n}}$, как у нас и было!
- $\Omega \leftrightarrow 1$, $\boxed{v_\lambda \leftrightarrow s_\lambda(x)}$.

Теперь можем применять всю машинерию симметрических функций!