Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 15. Вершинные операторы. Корреляционные функции мер Шура

Н. В. Цилевич

10 декабря 2021 г.

Вершинные операторы

Набор $s = (s_1, s_2, \dots) \rightsquigarrow$ вершинные операторы $\boxed{\Gamma_{\pm s} = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} s_n a_{\pm n})}$.

Вершинные операторы

Набор $s = (s_1, s_2, \dots) \rightsquigarrow$ вершинные операторы $\boxed{\Gamma_{\pm s} = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} s_n a_{\pm n})}$.

Предложение (свойства вершинных операторов)

1) $\Gamma_+(s)\Omega_m = \Omega_m$.
2) $\Gamma_\pm^*(s) = \Gamma_\mp(s)$.
3) $\Gamma_+(s)\Gamma_-(s') = e^{\sum n s_n s'_n}\Gamma_-(s')\Gamma_+(s)$.
4) $\Gamma_-(s)v_\emptyset = \sum_{\lambda\in\Pi} s_\lambda(y)v_\lambda$, *где* $s_\lambda(y)$ *– в специализации:* $p_n(y) = ns_n$.

Вершинные операторы

Набор $s = (s_1, s_2, \ldots) \rightsquigarrow$ вершинные операторы $\boxed{\Gamma_{\pm s} = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} s_n a_{\pm n})}$.

Предложение (свойства вершинных операторов)

1) $\Gamma_+(s)\Omega_m = \Omega_m$.
2) $\Gamma_\pm^*(s) = \Gamma_\mp(s)$.
3) $\Gamma_+(s)\Gamma_-(s') = e^{\sum n s_n s'_n}\Gamma_-(s')\Gamma_+(s)$.
4) $\Gamma_-(s)v_\emptyset = \sum_{\lambda\in\Pi} s_\lambda(y)v_\lambda$, *где* $s_\lambda(y)$ *– в специализации:* $p_n(y) = ns_n$.

- Таким образом, функции Шура – матричные элементы вершинных операторов: $\boxed{s_\lambda(y) = (\Gamma_-(s)v_\emptyset, v_\lambda)}$.
- (★) Аналогичная формула для $s_{\lambda/\mu}$ – ?

Вершинные операторы

Набор $s = (s_1, s_2, \dots) \rightsquigarrow$ вершинные операторы $\boxed{\Gamma_{\pm s} = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} s_n a_{\pm n})}$.

Предложение (свойства вершинных операторов)

1) $\Gamma_+(s)\Omega_m = \Omega_m$.
2) $\Gamma^*_\pm(s) = \Gamma_\mp(s)$.
3) $\Gamma_+(s)\Gamma_-(s') = e^{\sum ns_n s'_n}\Gamma_-(s')\Gamma_+(s)$.
4) $\Gamma_-(s)v_\emptyset = \sum_{\lambda\in\Pi} s_\lambda(y)v_\lambda$, *где* $s_\lambda(y)$ *– в специализации:* $p_n(y) = ns_n$.

Доказательство.

1) Поскольку $a_k\Omega_m = 0$ при $k > 0$.
2) Поскольку $a^*_k = a_{-k}$.

Продолжение доказательства

- Рассмотрим специализацию: $s_n = \frac{p_n(y)}{n}$.
- $\Gamma_-(s) = \exp(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)p_n(y)}{n}) = \prod\limits_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod\limits_{j} H(y_j)$.

Продолжение доказательства

- Рассмотрим специализацию: $s_n = \frac{p_n(y)}{n}$.
- $\Gamma_-(s) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)p_n(y)}{n}) = \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_j H(y_j)$.
- Тогда $\Gamma_+(s) = \Gamma_-^*(s) = \prod_j H^{\perp}(y_j)$.

Продолжение доказательства

- Рассмотрим специализацию: $s_n = \frac{p_n(y)}{n}$.
- $\Gamma_-(s) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)p_n(y)}{n}) = \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_j H(y_j)$.
- Тогда $\Gamma_+(s) = \Gamma_-^*(s) = \prod_j H^\perp(y_j)$.
- Знаем: $H^\perp(t)H(u) = \frac{1}{1-tu} H(u)H^\perp(t)$.

Продолжение доказательства

- Рассмотрим специализацию: $s_n = \frac{p_n(y)}{n}$.
- $\Gamma_-(s) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)p_n(y)}{n}) = \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_j H(y_j)$.
- Тогда $\Gamma_+(s) = \Gamma_-^*(s) = \prod_j H^\perp(y_j)$.
- Знаем: $H^\perp(t)H(u) = \frac{1}{1-tu} H(u)H^\perp(t)$.
- Тогда $\Gamma_+(s)\Gamma_-(s') = \prod_i H^\perp(y_i) \prod_j H(y_j') = \prod_{i,j} \frac{1}{1-y_i y_j'} \Gamma_-(s')\Gamma_+(s)$.

Продолжение доказательства

- Рассмотрим специализацию: $s_n = \frac{p_n(y)}{n}$.
- $\Gamma_-(s) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)p_n(y)}{n}) = \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_j H(y_j)$.
- Тогда $\Gamma_+(s) = \Gamma_-^*(s) = \prod_j H^{\perp}(y_j)$.
- Знаем: $H^{\perp}(t)H(u) = \frac{1}{1-tu}H(u)H^{\perp}(t)$.
- Тогда $\Gamma_+(s)\Gamma_-(s') = \prod_i H^{\perp}(y_i) \prod_j H(y_j') = \prod_{i,j} \frac{1}{1-y_i y_j'}\Gamma_-(s')\Gamma_+(s)$.
- $\prod_{i,j} \frac{1}{1-y_i y_j'} = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(y)p_n(y')}{n}) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} n s_n s_n') \implies$ QED (3).

Продолжение доказательства

- Рассмотрим специализацию: $s_n = \frac{p_n(y)}{n}$.
- $\Gamma_-(s) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)p_n(y)}{n}) = \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \prod_j H(y_j)$.
- Тогда $\Gamma_+(s) = \Gamma_-^*(s) = \prod_j H^{\perp}(y_j)$.
- Знаем: $H^{\perp}(t)H(u) = \frac{1}{1-tu} H(u)H^{\perp}(t)$.
- Тогда $\Gamma_+(s)\Gamma_-(s') = \prod_i H^{\perp}(y_i) \prod_j H(y_j') = \prod_{i,j} \frac{1}{1-y_i y_j'} \Gamma_-(s')\Gamma_+(s)$.
- $\prod_{i,j} \frac{1}{1-y_i y_j'} = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(y)p_n(y')}{n}) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} n s_n s_n') \implies$ QED (3).
- $\Gamma_-(s)v_{\emptyset} = \Gamma_-(s) \cdot 1 = \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum_{\lambda \in \Pi} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \sum_{\lambda \in \Pi} s_\lambda(y) v_\lambda$.

Производящие функции фермионов (фермионные поля)

- Производящие функции фермионов:
  $\psi(z) := \sum_n \psi_n z^n$, $\psi^*(w) := \sum_n \psi_n^* w^{-n}$.

Производящие функции фермионов (фермионные поля)

- Производящие функции фермионов:
  $\psi(z) := \sum_n \psi_n z^n$, $\psi^*(w) := \sum_n \psi_n^* w^{-n}$.

Лемма

- $\Gamma_\pm(s)\psi(z)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(z^{\pm 1})\psi(z)$ *(для специализации* $s_n = \frac{p_n(y)}{n}$*).*
- $\Gamma_\pm(s)\psi^*(w)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(w^{\pm 1})^{-1}\psi^*(w)$.

Производящие функции фермионов (фермионные поля)

- Производящие функции фермионов:
  $\psi(z) := \sum_n \psi_n z^n$, $\psi^*(w) := \sum_n \psi_n^* w^{-n}$.

Лемма

- $\Gamma_\pm(s)\psi(z)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(z^{\pm 1})\psi(z)$ *(для специализации* $s_n = \frac{p_n(y)}{n}$*).*
- $\Gamma_\pm(s)\psi^*(w)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(w^{\pm 1})^{-1}\psi^*(w)$.

Замечания.

- Если поменять местами Γ и Γ^{-1}:
  - $\Gamma_\pm(s)^{-1}\psi(z)\Gamma_\pm(s) = H(z^{\pm 1})^{-1}\psi(z)$,
    $\Gamma_\pm(s)^{-1}\psi^*(w)\Gamma_\pm(s) = H(w^{\pm 1})\psi^*(w)$.

  Док-во: $\Gamma_\pm(s)^{-1} = \Gamma_\pm(-s)$ и $H_{-s}(z) = \exp(-\sum s_n z^n) = H_s^{-1}(z)$.
- В частности,
  - $\Gamma_+(t)\Gamma_-(s)^{-1}\psi_n\Gamma_-(s)\Gamma_+(t)^{-1} = \sum a_k\psi_k$,
  - $\Gamma_+(t)\Gamma_-(s)^{-1}\psi_n^*\Gamma_-(s)\Gamma_+(t)^{-1} = \sum a_k'\psi_k^*$.

Доказательство

- $[a_n, \psi(z)] = \sum_k z^k [a_n, \psi_k] = \sum_k z^k \psi_{k-n} = z^n \psi(z).$

Доказательство

- $[a_n, \psi(z)] = \sum_k z^k [a_n, \psi_k] = \sum_k z^k \psi_{k-n} = z^n \psi(z).$
- $[\sum s_n a_{\pm n}, \psi(z)] = (\sum s_n z^{\pm n}) \psi(z) =: c\psi(z).$

Доказательство

- $[a_n, \psi(z)] = \sum_k z^k [a_n, \psi_k] = \sum_k z^k \psi_{k-n} = z^n \psi(z)$.
- $[\sum s_n a_{\pm n}, \psi(z)] = (\sum s_n z^{\pm n})\psi(z) =: c\psi(z)$.
- ($\bigstar$) $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]] + \dots$.
  (Подсказка: рассмотреть $e^{tA} B e^{-tA}$ и продифференцировать по t.)

Доказательство

- $[a_n, \psi(z)] = \sum_k z^k [a_n, \psi_k] = \sum_k z^k \psi_{k-n} = z^n \psi(z).$
- $[\sum s_n a_{\pm n}, \psi(z)] = (\sum s_n z^{\pm n})\psi(z) =: c\psi(z).$
- $(\bigstar)$ $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]] + \dots.$
  (Подсказка: рассмотреть $e^{tA} B e^{-tA}$ и продифференцировать по t.)
- $\Gamma_\pm(s)\psi(z)\Gamma_\pm(s)^{-1} = \psi(z) + c\psi(z) + \frac{c^2}{2}\psi(z) + \ldots = e^c \psi(z).$

Доказательство

- $[a_n, \psi(z)] = \sum_k z^k [a_n, \psi_k] = \sum_k z^k \psi_{k-n} = z^n \psi(z)$.
- $[\sum s_n a_{\pm n}, \psi(z)] = (\sum s_n z^{\pm n})\psi(z) =: c\psi(z)$.
- ($\star$) $e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]] + \ldots$.
  (Подсказка: рассмотреть $e^{tA} B e^{-tA}$ и продифференцировать по t.)
- $\Gamma_\pm(s)\psi(z)\Gamma_\pm(s)^{-1} = \psi(z) + c\psi(z) + \frac{c^2}{2}\psi(z) + \ldots = e^c \psi(z)$.
- $e^c = \exp(\sum s_n z^{\pm n}) = \exp(\sum \frac{p_n z^{\pm n}}{n}) = H(z^{\pm 1})$.
- Для $\psi^*(w)$ аналогично.

Формула Вика

Теорема (формула Вика)

$A_i = \sum_k a_{ik}\psi_k$, $B_i = \sum_k b_{ik}\psi_k^*$, $i = 1, \ldots, r \implies$

$\boxed{(A_1 \ldots A_r B_r \ldots B_1 v_\emptyset, v_\emptyset) = \det[K(i,j)]}$, *где* $K(i,j) = (A_i B_j v_\emptyset, v_\emptyset)$.

Формула Вика

Теорема (формула Вика)

$A_i = \sum_k a_{ik}\psi_k,\ B_i = \sum_k b_{ik}\psi_k^*,\ i = 1, \dots, r \implies$
$\boxed{(A_1 \dots A_r B_r \dots B_1 v_\emptyset, v_\emptyset) = \det[K(i,j)]}$, *где* $K(i,j) = (A_i B_j v_\emptyset, v_\emptyset)$.

Доказательство.

- Обе части линейны по a_{ik} и b_{ik} $\implies$ достаточно для $A_i = \psi_{n_i}$, $B_i = \psi^*_{m_i}$, т.е. для $(\psi_{n_1} \dots \psi_{n_r}\psi^*_{m_r} \dots \psi^*_{m_1} v_\emptyset, v_\emptyset) =: W$.

Формула Вика

Теорема (формула Вика)

$$A_i = \sum_k a_{ik}\psi_k,\ B_i = \sum_k b_{ik}\psi_k^*,\ i = 1, \ldots, r \implies$$

$$\boxed{(A_1 \ldots A_r B_r \ldots B_1 v_\emptyset, v_\emptyset) = \det[K(i,j)]},\ \text{где } K(i,j) = (A_i B_j v_\emptyset, v_\emptyset).$$

Доказательство.

- Обе части линейны по a_{ik} и b_{ik} $\implies$ достаточно для $A_i = \psi_{n_i}$, $B_i = \psi^*_{m_i}$, т.е. для $(\psi_{n_1} \ldots \psi_{n_r} \psi^*_{m_r} \ldots \psi^*_{m_1} v_\emptyset, v_\emptyset) =: W$.
- Все индексы должны быть отрицательны, иначе 0.
  - $W = 0$ при $\{n_1, \ldots, n_r\} \neq \{m_1, \ldots, m_r\}$.
  - Иначе $W = \pm 1$ в зависимости от знака перестановки $(n_1, \ldots, n_r) \mapsto (m_1, \ldots, m_r)$.

Формула Вика

Теорема (формула Вика)

$A_i = \sum_k a_{ik}\psi_k$, $B_i = \sum_k b_{ik}\psi_k^*$, $i = 1, \dots, r \implies$

$\boxed{(A_1 \dots A_r B_r \dots B_1 v_\emptyset, v_\emptyset) = \det[K(i,j)]}$, *где* $K(i,j) = (A_i B_j v_\emptyset, v_\emptyset)$.

Доказательство.

- Обе части линейны по a_{ik} и $b_{ik} \implies$ достаточно для $A_i = \psi_{n_i}$, $B_i = \psi^*_{m_i}$, т.е. для $(\psi_{n_1} \dots \psi_{n_r} \psi^*_{m_r} \dots \psi^*_{m_1} v_\emptyset, v_\emptyset) =: W$.
- Все индексы должны быть отрицательны, иначе 0.
  - $W = 0$ при $\{n_1, \dots, n_r\} \neq \{m_1, \dots, m_r\}$.
  - Иначе $W = \pm 1$ в зависимости от знака перестановки $(n_1, \dots, n_r) \mapsto (m_1, \dots, m_r)$.
- $K(i,j) = (\psi_{n_i}\psi^*_{m_j} v_\emptyset, v_\emptyset) = \delta_{n_i m_j}$. Таким образом, $[K(i,j)]$ – матрица той самой перестановки $\implies$ QED.

Меры Шура

Разберём доказательство детерминантной формулы для корреляционных функций мер Шура из статьи A. Okounkov, Infinite wedge and random partitions, *Selecta Math., New Ser.*, **7**, No. 1, 57–81 (2001).

Меры Шура

Разберём доказательство детерминантной формулы для корреляционных функций мер Шура из статьи A. Okounkov, Infinite wedge and random partitions, *Selecta Math.*, *New Ser.*, **7**, No. 1, 57–81 (2001).

- Мера Шура на Π с параметрами $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$:

$$\boxed{\mathcal{M}_{x,y}(\lambda) := \frac{1}{Z} s_\lambda(x) s_\lambda(y)},$$

  - $Z = \sum_\lambda s_\lambda(x)s_\lambda(y) = \prod_{i,j}(1 - x_i y_j)^{-1} = \exp(\sum_{k\geq 1} k s_k t_k)$ – нормировочная константа,
  - $s_k = \frac{1}{k}\sum_i x_i^k = \frac{1}{k}p_k(x)$, $t_k = \frac{1}{k}\sum_i y_i^k = \frac{1}{k}p_k(y)$.

Меры Шура

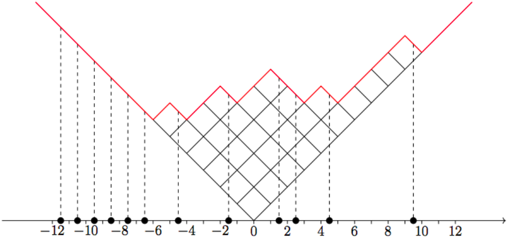
Разберём доказательство детерминантной формулы для корреляционных функций мер Шура из статьи A. Okounkov, Infinite wedge and random partitions, *Selecta Math., New Ser.*, **7**, No. 1, 57–81 (2001).

- Мера Шура на Π с параметрами $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$:

$$\boxed{\mathcal{M}_{x,y}(\lambda) := \frac{1}{Z} s_\lambda(x) s_\lambda(y)},$$

  - $Z = \sum\limits_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \prod\limits_{i,j} (1 - x_i y_j)^{-1} = \exp(\sum\limits_{k \geq 1} k s_k t_k)$ – нормировочная константа,
  - $s_k = \frac{1}{k} \sum\limits_i x_i^k = \frac{1}{k} p_k(x)$, $t_k = \frac{1}{k} \sum\limits_i y_i^k = \frac{1}{k} p_k(y)$.
- $s = (s_1, s_2, \ldots)$ и $t = (t_1, t_2, \ldots)$ тоже параметризуют меру Шура.
- Если $x_i = \bar{y}_i$ и $Z < \infty$, то это настоящая вероятностная мера.

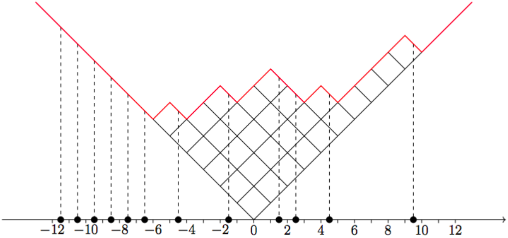
Ещё раз посмотрим на картинку



Таким образом, диаграмма Юнга $\leftrightarrow$ конфигурация точек на $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, а случайная диаграмма $\leftrightarrow$ точечный случайный процесс на $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

Случайные диаграммы как точечные процессы

Ещё раз посмотрим на картинку



Таким образом, диаграмма Юнга $\leftrightarrow$ конфигурация точек на $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$, а случайная диаграмма $\leftrightarrow$ точечный случайный процесс на $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$.

- Корреляционные функции мер Шура: $X \subset \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \mapsto$

$$\boxed{\rho(X) := \mathcal{M}_{x,y}(\{\lambda \in \Pi \colon X \subset S(\lambda)\})}.$$

Мера Планшереля как мера Шура

- Мера Планшереля $P_n(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}$, $\lambda \in \Pi_n$, – образ равномерной меры на $\mathfrak{S}_n$ относительно RSK.

Мера Планшереля как мера Шура

- Мера Планшереля $P_n(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}$, $\lambda \in \Pi_n$, – образ равномерной меры на $\mathfrak{S}_n$ относительно RSK.
- Пуассонизированная мера Планшереля с параметром ξ: $\mathcal{P}_\xi(\lambda) = \frac{e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}}{|\lambda|!} P_{|\lambda|}(\lambda) = \frac{e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}\dim^2 \lambda}{(|\lambda|!)^2}$ – смешали P_n с пуассоновскими весами.
- Общий принцип: асимптотика P_n при $n \to \infty$ такая же, как асимптотика $\mathcal{P}_\xi$ при $\xi \to \infty$.

Мера Планшереля как мера Шура

- Мера Планшереля $P_n(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}$, $\lambda \in \Pi_n$, – образ равномерной меры на $\mathfrak{S}_n$ относительно RSK.
- Пуассонизированная мера Планшереля с параметром ξ: $\mathcal{P}_\xi(\lambda) = \frac{e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}}{|\lambda|!} P_{|\lambda|}(\lambda) = \frac{e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}\dim^2 \lambda}{(|\lambda|!)^2}$ – смешали P_n с пуассоновскими весами.

Предложение

$\mathcal{P}_\xi$ – мера Шура с параметрами $s = t = (\sqrt{\xi}, 0, 0, \ldots)$.

Мера Планшереля как мера Шура

- Мера Планшереля $P_n(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}$, $\lambda \in \Pi_n$, – образ равномерной меры на $\mathfrak{S}_n$ относительно RSK.
- Пуассонизированная мера Планшереля с параметром ξ: $\mathcal{P}_\xi(\lambda) = \frac{e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}}{|\lambda|!} P_{|\lambda|}(\lambda) = \frac{e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}\dim^2 \lambda}{(|\lambda|!)^2}$ – смешали P_n с пуассоновскими весами.

Предложение

$\mathcal{P}_\xi$ – мера Шура с параметрами $s = t = (\sqrt{\xi}, 0, 0, \ldots)$.

Доказательство.

- Такие параметры = экспоненциальная специализация $\implies$ $s_\lambda(x) = \mathrm{ex}_{\sqrt{\xi}}\, s_\lambda$.

Мера Планшереля как мера Шура

- Мера Планшереля $P_n(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}$, $\lambda \in \Pi_n$, – образ равномерной меры на $\mathfrak{S}_n$ относительно RSK.
- Пуассонизированная мера Планшереля с параметром ξ: $\mathcal{P}_\xi(\lambda) = \frac{e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}}{|\lambda|!} P_{|\lambda|}(\lambda) = \frac{e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}\dim^2\lambda}{(|\lambda|!)^2}$ – смешали P_n с пуассоновскими весами.

Предложение

$\mathcal{P}_\xi$ – мера Шура с параметрами $s = t = (\sqrt{\xi}, 0, 0, \ldots)$.

Доказательство.

- Такие параметры = экспоненциальная специализация $\implies$ $s_\lambda(x) = \mathrm{ex}_{\sqrt{\xi}}\, s_\lambda$.
- Было: $\mathrm{ex}_1(s_\lambda) = \frac{\dim\lambda}{|\lambda|!} \implies s_\lambda(x) = \frac{\xi^{|\lambda|/2}\dim\lambda}{|\lambda|!} = s_\lambda(y)$.

Мера Планшереля как мера Шура

- Мера Планшереля $P_n(\lambda) = \frac{\dim^2 \lambda}{n!}$, $\lambda \in \Pi_n$, – образ равномерной меры на $\mathfrak{S}_n$ относительно RSK.
- Пуассонизированная мера Планшереля с параметром ξ: $\mathcal{P}_\xi(\lambda) = \frac{e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}}{|\lambda|!} P_{|\lambda|}(\lambda) = \frac{e^{-\xi}\xi^{|\lambda|}\dim^2 \lambda}{(|\lambda|!)^2}$ – смешали P_n с пуассоновскими весами.

Предложение

$\mathcal{P}_\xi$ – мера Шура с параметрами $s = t = (\sqrt{\xi}, 0, 0, \dots)$.

Доказательство.

- Такие параметры = экспоненциальная специализация $\implies$ $s_\lambda(x) = \mathrm{ex}_{\sqrt{\xi}}\, s_\lambda$.
- Было: $\mathrm{ex}_1(s_\lambda) = \frac{\dim \lambda}{|\lambda|!} \implies s_\lambda(x) = \frac{\xi^{|\lambda|/2} \dim \lambda}{|\lambda|!} = s_\lambda(y)$.
- $Z = e^\xi \implies$ QED.

Теорема (корреляционные функции мер Шура)

$\rho(X) = \det[K(x_i, x_j)]_{x_i, x_j \in X}$, *где ядро* K *см. в доказательстве.*

Теорема (корреляционные функции мер Шура)

$\rho(X) = \det[K(x_i, x_j)]_{x_i, x_j \in X}$, *где ядро K см. в доказательстве.*

Доказательство.

- $\rho(X) = \frac{1}{Z} \sum\limits_{S(\lambda) \supset X} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \frac{1}{Z} \big(\prod\limits_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) v_\emptyset, \Gamma_-(s) v_\emptyset \big) =$
  $= \frac{1}{Z} \left(\Gamma_+(s) \prod\limits_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) v_\emptyset, v_\emptyset \right).$

Теорема (корреляционные функции мер Шура)

$\rho(X) = \det[K(x_i, x_j)]_{x_i, x_j \in X}$, *где ядро* K *см. в доказательстве.*

Доказательство.

- $\rho(X) = \frac{1}{Z} \sum_{S(\lambda) \supset X} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \frac{1}{Z} \left(\prod_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) v_\emptyset, \Gamma_-(s) v_\emptyset \right) =$
  $= \frac{1}{Z} \left(\Gamma_+(s) \prod_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) v_\emptyset, v_\emptyset \right).$
- Положим $G := \Gamma_+(s) \Gamma_-(t)^{-1}$, $\Psi_k = G \psi_k G^{-1}$, $\Psi_k^* = G \psi_k^* G^{-1}$.

Теорема (корреляционные функции мер Шура)

$\rho(X) = \det[K(x_i, x_j)]_{x_i, x_j \in X}$, *где ядро K см. в доказательстве.*

Доказательство.

- $\rho(X) = \frac{1}{Z} \sum\limits_{S(\lambda) \supset X} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \frac{1}{Z} \big(\prod\limits_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) v_\emptyset, \Gamma_-(s) v_\emptyset \big) =$
  $= \frac{1}{Z} \left(\Gamma_+(s) \prod\limits_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) v_\emptyset, v_\emptyset \right).$
- Положим $G := \Gamma_+(s) \Gamma_-(t)^{-1}$, $\Psi_k = G \psi_k G^{-1}$, $\Psi_k^* = G \psi_k^* G^{-1}$.
- $\prod\limits_{x \in X} \Psi_x \Psi_x^* = \Gamma_+(s) \Gamma_-(t)^{-1} \prod\limits_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) \Gamma_+(s)^{-1}$.

Теорема (корреляционные функции мер Шура)

$\rho(X) = \det[K(x_i, x_j)]_{x_i, x_j \in X}$, *где ядро K см. в доказательстве.*

Доказательство.

- $\rho(X) = \frac{1}{Z} \sum\limits_{S(\lambda)\supset X} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \frac{1}{Z}\left(\prod\limits_{x\in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) v_\emptyset, \Gamma_-(s) v_\emptyset \right) =$
  $= \frac{1}{Z}\left(\Gamma_+(s) \prod\limits_{x\in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) v_\emptyset, v_\emptyset \right).$
- Положим $G := \Gamma_+(s)\Gamma_-(t)^{-1}$, $\Psi_k = G\psi_k G^{-1}$, $\Psi_k^* = G\psi_k^* G^{-1}$.
- $\prod\limits_{x\in X} \Psi_x \Psi_x^* = \Gamma_+(s)\Gamma_-(t)^{-1} \prod\limits_{x\in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t)\Gamma_+(s)^{-1}$.
- $\Gamma_+(s)\Gamma_-(t)^{-1} = \Gamma_+(s)\Gamma_-(-t) = e^{-\sum n s_n t_n} \Gamma_-(-t)\Gamma_+(s) =$
  $= \frac{1}{Z}\Gamma_-(t)^{-1}\Gamma_+(s)$.

Теорема (корреляционные функции мер Шура)

$\rho(X) = \det[K(x_i, x_j)]_{x_i, x_j \in X}$, *где ядро K см. в доказательстве.*

Доказательство.

- $\rho(X) = \frac{1}{Z} \sum_{S(\lambda) \supset X} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \frac{1}{Z} \big(\prod_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) v_\emptyset, \Gamma_-(s) v_\emptyset \big) =$
  $= \frac{1}{Z} \left(\Gamma_+(s) \prod_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) v_\emptyset, v_\emptyset \right)$.
- Положим $G := \Gamma_+(s)\Gamma_-(t)^{-1}$, $\Psi_k = G \psi_k G^{-1}$, $\Psi_k^* = G \psi_k^* G^{-1}$.
- $\prod_{x \in X} \Psi_x \Psi_x^* = \Gamma_+(s)\Gamma_-(t)^{-1} \prod_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \Gamma_-(t) \Gamma_+(s)^{-1}$.
- $\Gamma_+(s)\Gamma_-(t)^{-1} = \Gamma_+(s)\Gamma_-(-t) = e^{-\sum n s_n t_n} \Gamma_-(-t)\Gamma_+(s) =$
  $= \frac{1}{Z} \Gamma_-(t)^{-1} \Gamma_+(s)$.
- $\Gamma_+(s) v_\emptyset = \Gamma_-(t)^* v_\emptyset = v_\emptyset$.

Продолжение доказательства

- $\left(\prod_{x \in X} \Psi_x \Psi_x^* v_\emptyset, v_\emptyset \right) = \frac{1}{Z} \big(\Gamma_-(t)^{-1} \Gamma_+(s) \prod_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \, \Gamma_-(t) \Gamma_+(s)^{-1} v_\emptyset, v_\emptyset \big)$
  $= \frac{1}{Z} \big(\Gamma_+(s) \prod_{x \in X} \psi_x \psi_x^* \, \Gamma_-(t) v_\emptyset, v_\emptyset \big) = \rho(X).$
- Итого: $\rho(X) = \left(\prod_{x \in X} \Psi_x \Psi_x^* v_\emptyset, v_\emptyset \right).$

Продолжение доказательства

- $\left(\prod_{x\in X}\Psi_x\Psi^*_x v_\emptyset, v_\emptyset\right) = \frac{1}{Z}\Big(\Gamma_-(t)^{-1}\Gamma_+(s)\prod_{x\in X}\psi_x\psi^*_x\,\Gamma_-(t)\Gamma_+(s)^{-1}v_\emptyset, v_\emptyset\Big)$
  $= \frac{1}{Z}\Big(\Gamma_+(s)\prod_{x\in X}\psi_x\psi^*_x\,\Gamma_-(t)v_\emptyset, v_\emptyset\Big) = \rho(X).$
- Итого: $\rho(X) = \left(\prod_{x\in X}\Psi_x\Psi^*_x v_\emptyset, v_\emptyset\right).$
- Ψ_k антикоммутируют $\implies \rho(X) = (\Psi_{x_1}\dots\Psi_{x_n}\Psi^*_{x_n}\dots\Psi^*_{x_1}v_\emptyset, v_\emptyset).$

Продолжение доказательства

- $\left(\prod_{x\in X}\Psi_x\Psi_x^* v_\emptyset, v_\emptyset\right) = \frac{1}{Z}\left(\Gamma_-(t)^{-1}\Gamma_+(s)\prod_{x\in X}\psi_x\psi_x^*\,\Gamma_-(t)\Gamma_+(s)^{-1}v_\emptyset, v_\emptyset\right)$
$= \frac{1}{Z}\left(\Gamma_+(s)\prod_{x\in X}\psi_x\psi_x^*\,\Gamma_-(t)v_\emptyset, v_\emptyset\right) = \rho(X).$
- Итого: $\rho(X) = \left(\prod_{x\in X}\Psi_x\Psi_x^* v_\emptyset, v_\emptyset\right)$.
- Ψ_k антикоммутируют $\implies \rho(X) = (\Psi_{x_1}\dots\Psi_{x_n}\Psi_{x_n}^*\dots\Psi_{x_1}^* v_\emptyset, v_\emptyset)$.
- По лемме Ψ_x (соотв. Ψ_x^*) – линейная комбинация ψ_k (соотв. ψ_k^*) $\implies$ применима формула Вика.

Продолжение доказательства

- $\big(\prod_{x\in X}\Psi_x\Psi_x^* v_\emptyset, v_\emptyset\big) = \frac{1}{Z}\big(\Gamma_-(t)^{-1}\Gamma_+(s)\prod_{x\in X}\psi_x\psi_x^*\,\Gamma_-(t)\Gamma_+(s)^{-1}v_\emptyset, v_\emptyset\big)$ $= \frac{1}{Z}\big(\Gamma_+(s)\prod_{x\in X}\psi_x\psi_x^*\,\Gamma_-(t)v_\emptyset, v_\emptyset\big) = \rho(X)$.
- Итого: $\rho(X) = \big(\prod_{x\in X}\Psi_x\Psi_x^* v_\emptyset, v_\emptyset\big)$.
- Ψ_k антикоммутируют $\implies$ $\rho(X) = (\Psi_{x_1}\dots\Psi_{x_n}\Psi_{x_n}^*\dots\Psi_{x_1}^* v_\emptyset, v_\emptyset)$.
- По лемме Ψ_x (соотв. Ψ_x^*) – линейная комбинация ψ_k (соотв. ψ_k^*) $\implies$ применима формула Вика.
- Формула Вика $\implies$ $\rho(X) = \det[K(x_i, x_j)]_{x_i,x_j\in X}$, где $K(x,y) = \big(\Psi_x\Psi_y^* v_\emptyset, v_\emptyset\big)$.

Таким образом, детерминантная формула уже доказана. Но можно ещё вычислить ядро.

Вычисление ядра

- Вспомним:
  - $\Gamma_\pm(s)\psi(z)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(z^{\pm 1})\psi(z)$,
  - $\Gamma_\pm(s)\psi^*(w)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(w^{\pm 1})^{-1}\psi^*(w)$.

Вычисление ядра

- Вспомним:
  - $\Gamma_{\pm}(s)\psi(z)\Gamma_{\pm}(s)^{-1} = H(z^{\pm 1})\psi(z)$,
  - $\Gamma_{\pm}(s)\psi^{*}(w)\Gamma_{\pm}(s)^{-1} = H(w^{\pm 1})^{-1}\psi^{*}(w)$.
- Ещё вспомним: $K(x,y) = \left(G\psi_x\psi_y^{*}G^{-1}v_{\emptyset}, v_{\emptyset}\right)$; $G := \Gamma_{+}(s)\Gamma_{-}(t)^{-1}$.

Вычисление ядра

- Вспомним:
  - $\Gamma_\pm(s)\psi(z)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(z^{\pm 1})\psi(z)$,
  - $\Gamma_\pm(s)\psi^*(w)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(w^{\pm 1})^{-1}\psi^*(w)$.
- Ещё вспомним: $K(x,y) = \left(G\psi_x\psi_y^* G^{-1} v_\emptyset, v_\emptyset\right)$; $G := \Gamma_+(s)\Gamma_-(t)^{-1}$.
- $\mathcal{K}(z,w) := \sum_{m,n} K(m,n) z^m w^{-n} = (G\psi(z)\psi^*(w)G^{-1}v_\emptyset, v_\emptyset) =$

  $= \frac{H_s(z)}{H_t(z^{-1})}\frac{H_t(w^{-1})}{H_s(w)}(\psi(z)\psi^*(w)v_\emptyset, v_\emptyset)$.

Вычисление ядра

- Вспомним:
  - $\Gamma_\pm(s)\psi(z)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(z^{\pm 1})\psi(z)$,
  - $\Gamma_\pm(s)\psi^*(w)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(w^{\pm 1})^{-1}\psi^*(w)$.
- Ещё вспомним: $K(x, y) = \big(G\psi_x\psi_y^* G^{-1} v_\emptyset, v_\emptyset\big)$; $G := \Gamma_+(s)\Gamma_-(t)^{-1}$.
- $\mathcal{K}(z, w) := \sum_{m,n} K(m, n) z^m w^{-n} = (G\psi(z)\psi^*(w)G^{-1} v_\emptyset, v_\emptyset) =$

  $= \frac{H_s(z)}{H_t(z^{-1})}\frac{H_t(w^{-1})}{H_s(w)}(\psi(z)\psi^*(w)v_\emptyset, v_\emptyset)$.
- $(\psi(z)\psi^*(w)v_\emptyset, v_\emptyset) = \sum_{m,n}(\psi_m\psi_n^* v_\emptyset, v_\emptyset)z^m w^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} w^{k+\frac{1}{2}} z^{-k-\frac{1}{2}} =$

  $= \frac{\sqrt{\frac{w}{z}}}{1-\frac{w}{z}} = \frac{\sqrt{zw}}{z-w}$.

Вычисление ядра

- Вспомним:
  - $\Gamma_\pm(s)\psi(z)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(z^{\pm 1})\psi(z)$,
  - $\Gamma_\pm(s)\psi^*(w)\Gamma_\pm(s)^{-1} = H(w^{\pm 1})^{-1}\psi^*(w)$.
- Ещё вспомним: $K(x,y) = \left(G\psi_x\psi_y^* G^{-1} v_\emptyset, v_\emptyset\right)$; $G := \Gamma_+(s)\Gamma_-(t)^{-1}$.
- $\mathcal{K}(z,w) := \sum\limits_{m,n} K(m,n) z^m w^{-n} = (G\psi(z)\psi^*(w)G^{-1}v_\emptyset, v_\emptyset) =$
  $= \frac{H_s(z)}{H_t(z^{-1})}\frac{H_t(w^{-1})}{H_s(w)}(\psi(z)\psi^*(w)v_\emptyset, v_\emptyset)$.
- $(\psi(z)\psi^*(w)v_\emptyset, v_\emptyset) = \sum\limits_{m,n}(\psi_m\psi_n^* v_\emptyset, v_\emptyset) z^m w^{-n} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} w^{k+\frac{1}{2}} z^{-k-\frac{1}{2}} =$
  $= \frac{\sqrt{\frac{w}{z}}}{1-\frac{w}{z}} = \frac{\sqrt{zw}}{z-w}$.
- Итого:
$$\mathcal{K}(z,w) = \frac{\sqrt{zw}}{z-w}\frac{J_{s,t}(z)}{J_{s,t}(w)}, \quad \text{где} \quad J_{s,t}(z) = \frac{H_s(z)}{H_t(z^{-1})}.$$
- $J_{s,t}(z)$ – обобщённые функции Бесселя.

Итак, корреляционные функции меры Шура с параметрами s, t имеют вид

$$\rho(X) = \det[K(x_i, x_j)]_{x_i, x_j \in X},$$

где

$$\mathcal{K}(z, w) = \frac{\sqrt{zw}}{z - w} \frac{J_{s,t}(z)}{J_{s,t}(w)}, \quad \text{где} \quad J_{s,t}(z) = \frac{H_s(z)}{H_t(z^{-1})}.$$

Итак, корреляционные функции меры Шура с параметрами s, t имеют вид

$$\rho(X) = \det[K(x_i, x_j)]_{x_i, x_j \in X},$$

где

$$\mathcal{K}(z, w) = \frac{\sqrt{zw}}{z - w} \frac{J_{s,t}(z)}{J_{s,t}(w)}, \quad \text{где} \quad J_{s,t}(z) = \frac{H_s(z)}{H_t(z^{-1})}.$$

Пример. Для пуассонизированной меры Планшереля
$H_s(z) = H_t(z) = e^{\sqrt{\xi} z} \implies J_{s,t}(z) = e^{\sqrt{\xi}(z - z^{-1})} \implies$

$$\mathcal{K}_\xi(z, w) = \frac{\sqrt{zw}}{z - w} e^{\sqrt{\xi}((z - z^{-1}) - (w - w^{-1}))}.$$

Далее $K_\xi(m, n)$ восстанавливается контурным интегрированием $\rightsquigarrow$ дискретное ядро Бесселя.