# Теория представлений симметрических групп

# Лекция 15. Доказательство теоремы Тома с помощью эргодического метода Вершика–Керова

Н. В. Цилевич

10 декабря 2021 г.

# Эргодический метод Вершика–Керова

**Теорема (эргодический метод Вершика–Керова)**

*$M$ – эргодическая центральная мера на $\mathbb{T}(\mathbb{Y}) \implies$ для $M$-п.в. путей $t = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ существуют пределы*

$$\phi_t(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim(\lambda, \nu_n)}{\dim \nu_n}, \qquad \lambda \in \mathbb{Y}.$$

*Функция $\phi_t$ гармоническая и соответствует мере $M$, т.е. $M(C_u) = \phi_t(\mathrm{sh}(u))$.*

- Путь $t$, для которого существуют такие пределы, – регулярный.

# Эргодический метод Вершика–Керова

## Теорема (эргодический метод Вершика–Керова)

*$M$ – эргодическая центральная мера на $\mathbb{T}(\mathbb{Y}) \implies$ для $M$-п.в. путей $t = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ существуют пределы*

$$\phi_t(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim(\lambda, \nu_n)}{\dim \nu_n}, \qquad \lambda \in \mathbb{Y}.$$

*Функция $\phi_t$ гармоническая и соответствует мере $M$, т.е. $M(C_u) = \phi_t(\mathrm{sh}(u))$.*

- Путь $t$, для которого существуют такие пределы, – регулярный.

## Следствие

*Для любой экстремальной гармонической функции $\phi$ существует путь $t \in \mathbb{T}(\mathbb{Y})$, для которого $\phi = \phi_t$.*

### Следствие (аппроксимация конечными характерами)

*Для любого экстремального характера* $\chi \in \mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ *существует последовательность неприводимых характеров* $\chi^{\nu_n}$ *групп* $\mathfrak{S}_n$*:*

$$\chi(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi^{\nu_n}(g)}{\dim \chi^{\nu_n}}, \qquad g \in \mathfrak{S}_\infty.$$

## Следствие (аппроксимация конечными характерами)

*Для любого экстремального характера $\chi \in \mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ существует последовательность неприводимых характеров $\chi^{\nu_n}$ групп $\mathfrak{S}_n$:*

$$\chi(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi^{\nu_n}(g)}{\dim \chi^{\nu_n}}, \qquad g \in \mathfrak{S}_\infty.$$

**Доказательство.**

- $\chi \leftrightarrow M \leftrightarrow \phi$.
- $t = (\nu_1, \nu_2, \ldots)$ – регулярный путь для $M \rightsquigarrow \chi^{\nu_n}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\chi^{\nu_n}}{\dim \nu_n}\Big|_{\mathfrak{S}_m} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Y}_m} \frac{\dim(\lambda,\nu_n)}{\dim \nu_n}\chi^\lambda = \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Y}_m} \phi_t(\lambda)\chi^\lambda = \chi_m$.

## Следствие (аппроксимация конечными характерами)

*Для любого экстремального характера* $\chi \in \mathcal{E}(\mathfrak{S}_\infty)$ *существует последовательность неприводимых характеров* $\chi^{\nu_n}$ *групп* $\mathfrak{S}_n$*:*

$$\chi(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi^{\nu_n}(g)}{\dim \chi^{\nu_n}}, \qquad g \in \mathfrak{S}_\infty.$$

**Доказательство.**

- $\chi \leftrightarrow M \leftrightarrow \phi$.
- $t = (\nu_1, \nu_2, \dots)$ – регулярный путь для $M \rightsquigarrow \chi^{\nu_n}$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\chi^{\nu_n}}{\dim \nu_n}\Big|_{\mathfrak{S}_m} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Y}_m} \frac{\dim(\lambda,\nu_n)}{\dim \nu_n}\chi^\lambda = \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Y}_m} \phi_t(\lambda)\chi^\lambda = \chi_m$.

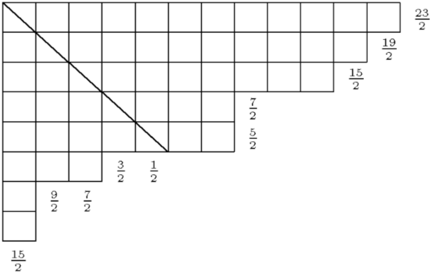
Таким образом, нахождение экстремальных характеров сводится к описанию регулярных путей.

# Модифицированные координаты Фробениуса

- Модифицированные координаты Фробениуса $(a|b)$ диаграммы $\lambda$:

$$a_i := \lambda_i - i + \frac{1}{2}, \quad b_i := \lambda'_i - i + \frac{1}{2},$$

$i = 1, \dots, d$ – длина диагонали.




**Пример:** $\lambda = (\frac{23}{2}, \frac{19}{2}, \frac{15}{2}, \frac{7}{2}, \frac{5}{2} | \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

# Суперсимметрические функции

- Суперсимметрические степенные суммы:
$p_n^\circ(x,y,\gamma) = \sum_i x_i^n + (-1)^{n+1}\sum_i y_i^n,\ n \geq 2,$
$p_1^\circ(x,y,\gamma) = \gamma + \sum_i x_i + \sum_i y_i$ (понятно, почему добавлена $\gamma$?).
- Суперсимметрические полные однородные симметрические функции:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^\circ(x,y,\gamma) z^n = e^{\gamma z} \prod_{k\geq 1} \frac{1+x_k z}{1-y_k z}$$

– АГА!

- Суперсимметрические функции Шура $s_\lambda^\circ(x,y,\gamma)$:

$$s_\lambda^\circ(x,y,\gamma) = \sum_{\mu=(k)^{r_k}\vdash n} \chi^\lambda(\mu) \prod_{k\geq 1} \frac{{p_k^\circ}^{r_k}(x,y,\gamma)}{k^{r_k} k!}.$$

# Суперсимметрические функции

- Суперсимметрические степенные суммы:
  $p_n^\circ(x,y,\gamma) = \sum_i x_i^n + (-1)^{n+1} \sum_i y_i^n$, $n \geq 2$,
  $p_1^\circ(x,y,\gamma) = \gamma + \sum_i x_i + \sum_i y_i$ (понятно, почему добавлена $\gamma$?).
- Суперсимметрические полные однородные симметрические функции:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n^\circ(x,y,\gamma) z^n = e^{\gamma z} \prod_{k\geq 1} \frac{1+x_k z}{1-y_k z} \qquad \text{– АГА!}$$

- Суперсимметрические функции Шура $s_\lambda^\circ(x,y,\gamma)$:

$$s_\lambda^\circ(x,y,\gamma) = \sum_{\mu=(k)^{r_k}\vdash n} \chi^\lambda(\mu) \prod_{k\geq 1} \frac{{p_k^\circ}^{r_k}(x,y,\gamma)}{k^{r_k} k!}.$$

- $\nu = (a|b) \implies s_\lambda^\circ(\nu) := s_\lambda^\circ(a_1,\ldots,a_d; b_1,\ldots,b_d)$.

## Асимптотика относительных размерностей

### Теорема (относительные размерности)

*Для фиксированной* $\lambda$ *и растущей* $\nu^{(n)} \in \mathbb{Y}_n$

$$\frac{\dim(\lambda, \nu^{(n)})}{\dim \nu^{(n)}} = s^\circ_\lambda\left(\frac{1}{n}\nu^{(n)}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

*где* $O(\ldots)$ *зависит только от* $\lambda$ *и равномерно по* $\nu$*.*

Здесь $s^\circ_\lambda\left(\frac{1}{n}\nu^{(n)}\right) = s^\circ_\lambda\left(\frac{a_1}{n}, \ldots, \frac{a_d}{n}; \frac{b_1}{n}, \ldots, \frac{b_d}{n}\right)$.

## Следствие

*Для последовательности растущих диаграмм $\nu^{(n)} \in \mathbb{Y}_n$ следующие условия равносильны:*

- *пределы* $\frac{\dim(\lambda, \nu^{(n)})}{\dim \nu^{(n)}}$ $(*)$ *существуют для любой* $\lambda \in \mathbb{Y}$*;*
- *для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существуют пределы относительных длин строк и столбцов:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu_k^{(n)}}{n} = \alpha_k$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\nu^{(n)})'_k}{n} = \beta_k$ $(**)$.

## Следствие

*Для последовательности растущих диаграмм $\nu^{(n)} \in \mathbb{Y}_n$ следующие условия равносильны:*

- *пределы* $\frac{\dim(\lambda, \nu^{(n)})}{\dim \nu^{(n)}}$ $(*)$ *существуют для любой* $\lambda \in \mathbb{Y}$;
- *для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существуют пределы относительных длин строк и столбцов:* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu_k^{(n)}}{n} = \alpha_k$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\nu^{(n)})'_k}{n} = \beta_k$ $(**)$.

**Доказательство.**

- Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu_k^{(n)}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_k}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\nu^{(n)})'_k}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_k}{n}$.

## Следствие

*Для последовательности растущих диаграмм $\nu^{(n)} \in \mathbb{Y}_n$ следующие условия равносильны:*

- *пределы $\frac{\dim(\lambda,\nu^{(n)})}{\dim \nu^{(n)}}$ $(*)$ существуют для любой $\lambda \in \mathbb{Y}$;*
- *для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют пределы относительных длин строк и столбцов: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu_k^{(n)}}{n} = \alpha_k$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\nu^{(n)})'_k}{n} = \beta_k$ $(**)$.*

**Доказательство.**

- Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu_k^{(n)}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_k}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\nu^{(n)})'_k}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_k}{n}$.
- Если эти пределы существуют и равны $\alpha_k$ и $\beta_k$, то $\frac{\dim(\lambda,\nu^{(n)})}{\dim \nu^{(n)}} = s^\circ_\lambda\left(\frac{1}{n}\nu^{(n)}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \to s^\circ_\lambda(\alpha;\beta)$.

## Следствие

*Для последовательности растущих диаграмм $\nu^{(n)} \in \mathbb{Y}_n$ следующие условия равносильны:*

- *пределы $\frac{\dim(\lambda, \nu^{(n)})}{\dim \nu^{(n)}}$ $(*)$ существуют для любой $\lambda \in \mathbb{Y}$;*
- *для любого $k \in \mathbb{N}$ существуют пределы относительных длин строк и столбцов: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu_k^{(n)}}{n} = \alpha_k$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\nu^{(n)})'_k}{n} = \beta_k$ $(**)$.*

**Доказательство.**

- Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\nu_k^{(n)}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_k}{n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\nu^{(n)})'_k}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_k}{n}$.
- Если эти пределы существуют и равны $\alpha_k$ и $\beta_k$, то $\frac{\dim(\lambda, \nu^{(n)})}{\dim \nu^{(n)}} = s^\circ_\lambda\left(\frac{1}{n}\nu^{(n)}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \to s^\circ_\lambda(\alpha; \beta)$.
- Если пределы $(*)$ существуют для всех $\lambda \implies$ можно выбрать подпоследовательность, вдоль которой существуют пределы $(**)$ $\implies$ вдоль неё по доказанному OK $\implies$ все пределы вдоль подпоследовательностей совпадают, так как линейная оболочка $s^\circ_\lambda(\cdot)$ разделяет точки.

## Теорема

*Для пути* $t = (\nu^{(1)}, \nu^{(2)}, \dots)$ *следующие условия равносильны:*

- *для любой* $w \in \mathfrak{S}_\infty$ *существуют пределы*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\chi^{\nu^{(n)}}(w)}{\dim \nu^{(n)}} = \chi(w);$$

- *для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существуют пределы относительных длин строк и столбцов:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_k^{(n)}}{n} = \alpha_k, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{(\nu^{(n)})'_k}{n} = \beta_k.$$

*Соответствующий предельный характер совпадает с* $\chi_{\alpha,\beta}$*.*

Итак, истинный смысл параметров Тома – предельные нормированные длины строк и столбцов (частоты)!

# Меры Тома

- Цилиндрические распределения центральной меры $M_{\alpha,\beta}$ (меры Тома) суть функции Шура:

$$\boxed{M_{\alpha,\beta}(C_u) = s^{\circ}_{\lambda}(\alpha,\beta)}, \quad \lambda = \mathrm{sh}(u) \in \mathbb{Y}_n.$$

- В частности, если $\alpha$ (соотв. $\beta$) содержит $k$ ненулевых элементов, то $M_{\alpha,\beta}$ сосредоточена на таблицах с $\leq k$ строками (столбцами).

# Меры Тома

- Цилиндрические распределения центральной меры $M_{\alpha,\beta}$ (меры Тома) суть функции Шура:

$$\boxed{M_{\alpha,\beta}(C_u) = s^\circ_\lambda(\alpha,\beta)}, \quad \lambda = \mathrm{sh}(u) \in \mathbb{Y}_n.$$

- В частности, если $\alpha$ (соотв. $\beta$) содержит $k$ ненулевых элементов, то $M_{\alpha,\beta}$ сосредоточена на таблицах с $\le k$ строками (столбцами).

**Пример:** $\alpha = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $\beta = 0$, $\gamma = 0 \implies$ $M(C_u) = s_\lambda(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2^n} s_\lambda(1,1) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 + 1}{2^n}$ для $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) = \mathrm{sh}(u)$. Это марковская цепь на $\mathbb{Y}$:

$$(n-k,k) \mapsto \begin{cases} (n-k+1,k), & \text{с вероятностью} \frac{n-2k+2}{2(n-2k+1)}, \\ (n-k,k+1), & \text{с вероятностью} \frac{n-2k}{2(n-2k+1)}. \end{cases}$$

# Меры Тома как образы мер Бернулли

- Пусть $(\alpha, 0, 0) \in \Omega \rightsquigarrow$ мера $m_\alpha$ на $\mathbb{N}$: $m_\alpha(n) = \alpha_n$.
- $X := \mathbb{N}^\infty$ с мерой Бернулли $m_\alpha^\infty$.
- $x \in X \rightsquigarrow (P_n(x), Q_n(x)) := \mathrm{RSK}([x]_n)$, где $[x]_n = (x_1, \dots, x_n)$.
  - $P_n(x)$ ведёт себя сложно;
  - $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(x) =: Q(x) \in \mathbb{T}(Y)$.
- Получили отображение юнгизации $\pi\colon X \to \mathbb{T}(Y)$.

# Меры Тома как образы мер Бернулли

- Пусть $(\alpha, 0, 0) \in \Omega \rightsquigarrow$ мера $m_\alpha$ на $\mathbb{N}$: $m_\alpha(n) = \alpha_n$.
- $X := \mathbb{N}^\infty$ с мерой Бернулли $m_\alpha^\infty$.
- $x \in X \rightsquigarrow (P_n(x), Q_n(x)) := \mathrm{RSK}([x]_n)$, где $[x]_n = (x_1, \ldots, x_n)$.
  - $P_n(x)$ ведёт себя сложно;
  - $\lim\limits_{n \to \infty} Q_n(x) =: Q(x) \in \mathbb{T}(Y)$.
- Получили отображение юнгизации $\pi \colon X \to \mathbb{T}(Y)$.

**Теорема (Вершик–Керов 1986)**

*Отображение юнгизации – гомоморфизм пространств с мерой* $(X, m_\alpha^\infty) \to (\mathbb{T}(\mathbb{Y}), M_{(\alpha,0,0)})$.

Итого: мера Тома есть образ меры Бернулли под действием RSK!

# Меры Тома как образы мер Бернулли

- Пусть $(\alpha, 0, 0) \in \Omega \rightsquigarrow$ мера $m_\alpha$ на $\mathbb{N}$: $m_\alpha(n) = \alpha_n$.
- $X := \mathbb{N}^\infty$ с мерой Бернулли $m_\alpha^\infty$.
- $x \in X \rightsquigarrow (P_n(x), Q_n(x)) := \mathrm{RSK}([x]_n)$, где $[x]_n = (x_1, \ldots, x_n)$.
  - $P_n(x)$ ведёт себя сложно;
  - $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(x) =: Q(x) \in \mathbb{T}(Y)$.
- Получили отображение юнгизации $\pi\colon X \to \mathbb{T}(Y)$.

**Теорема (Вершик–Керов 1986)**

*Отображение юнгизации – гомоморфизм пространств с мерой* $(X, m_\alpha^\infty) \to (\mathbb{T}(\mathbb{Y}), M_{(\alpha,0,0)})$.

Итого: мера Тома есть образ меры Бернулли под действием RSK!

**Теорема (Сняды 2014)**

*На самом деле это изоморфизм пространств с мерой!*

# Меры Тома как образы мер Бернулли

**Теорема (Вершик–Керов 1986)**

*Отображение юнгизации – гомоморфизм пространств с мерой* $(X, m_\alpha^\infty) \to (\mathbb{T}(\mathbb{Y}), M_{(\alpha,0,0)})$.

Итого: мера Тома есть образ меры Бернулли под действием RSK!

**Теорема (Сняды 2014)**

*На самом деле это изоморфизм пространств с мерой!*

- Конструкция обобщается на произвольные параметры Тома $(\alpha, \beta, \gamma)$ (с использованием обобщённой версии RSK).

# Меры Тома как образы мер Бернулли

**Теорема (Вершик–Керов 1986)**

*Отображение юнгизации – гомоморфизм пространств с мерой* $(X, m_\alpha^\infty) \to (\mathbb{T}(\mathbb{Y}), M_{(\alpha,0,0)})$.

Итого: мера Тома есть образ меры Бернулли под действием RSK!

**Теорема (Сняды 2014)**

*На самом деле это изоморфизм пространств с мерой!*

- Конструкция обобщается на произвольные параметры Тома $(\alpha, \beta, \gamma)$ (с использованием обобщённой версии RSK).
- Вершик–Цилевич (2021): юнгизация + эргодический метод + т.н. граф Шура–Вейля = новое, чисто комбинаторное доказательство теоремы Тома для дискретного случая.

- При $\alpha = \beta = 0$ (т.е. при сублинейном росте строк и столбцов) существует единственная центральная мера – мера Планшереля.
  - Соответствующий характер есть $\delta_e$ (почему?), т.е. характер регулярного представления.
  - А как растут строки и столбцы? (Спойлер: как $\sqrt{n}$.)