Спецкурс «Симметрические функции»

Лекция 16. Перечислительная теория Пойа

Н. В. Цилевич

17 декабря 2021 г.

Типичный вопрос: сколько существует раскрасок вершин квадрата в k цветов, которые не переходят друг в друга при симметриях квадрата?

Перечислительная теория Пойа: цикловый индекс

- S – конечное множество; на нём действует $\mathfrak{S}_S$.
- $\mathfrak{S}_S \supset G \rightsquigarrow$ цикловый индекс $\boxed{Z_G := \dfrac{1}{|G|} \sum_{w \in G} p_{\rho(w)}} \in \Lambda_n$, $n = |S|$.

- S – конечное множество; на нём действует $\mathfrak{S}_S$.
- $\mathfrak{S}_S \supset G \rightsquigarrow$ цикловый индекс $\boxed{Z_G := \dfrac{1}{|G|} \sum_{w \in G} p_{\rho(w)}} \in \Lambda_n, \; n = |S|$.

Примеры.

- $S = [n], \; G = \mathfrak{S}_n \implies Z_{\mathfrak{S}_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{n!}{z_\lambda} p_\lambda = h_n.$

Перечислительная теория Пойа: цикловый индекс

- S – конечное множество; на нём действует $\mathfrak{S}_S$.
- $\mathfrak{S}_S \supset G \rightsquigarrow$ цикловый индекс $\boxed{Z_G := \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} p_{\rho(w)}} \in \Lambda_n,\ n = |S|$.

Примеры.

- $S = [n],\ G = \mathfrak{S}_n \implies Z_{\mathfrak{S}_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{n!}{z_\lambda} p_\lambda = h_n$.
- Диэдральная группа $D_4 \subset S_4$ всех симметрий квадрата:
  - тождественная перестановка $\rightsquigarrow p_1^4$;
  - повороты на 90° и $270^\circ \rightsquigarrow 2p_4$;
  - поворот на $180^\circ \rightsquigarrow p_2^2$;
  - отражения по вертикали и горизонтали $\rightsquigarrow 2p_2^2$;
  - отражения по диагонали $\rightsquigarrow 2p_1^2 p_2$.

  Итого: $Z_{D_4} = \frac{1}{8}(p_1^4 + 2p_1^2 p_2 + 3p_2^2 + 2p_4)$.

Перечислительная теория Пойа: цикловый индекс

- S – конечное множество; на нём действует $\mathfrak{S}_S$.
- $\mathfrak{S}_S \supset G \rightsquigarrow$ цикловый индекс $\boxed{Z_G := \frac{1}{|G|} \sum_{w \in G} p_{\rho(w)}} \in \Lambda_n,\ n = |S|.$

Примеры.

- $S = [n],\ G = \mathfrak{S}_n \implies Z_{\mathfrak{S}_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \frac{n!}{z_\lambda} p_\lambda = h_n.$
- Диэдральная группа $D_4 \subset S_4$ всех симметрий квадрата:
  - тождественная перестановка $\rightsquigarrow p_1^4$;
  - повороты на 90° и 270° $\rightsquigarrow 2p_4$;
  - поворот на 180° $\rightsquigarrow p_2^2$;
  - отражения по вертикали и горизонтали $\rightsquigarrow 2p_2^2$;
  - отражения по диагонали $\rightsquigarrow 2p_1^2 p_2$.

  Итого: $Z_{D_4} = \frac{1}{8}(p_1^4 + 2p_1^2 p_2 + 3p_2^2 + 2p_4)$.
- $G =$ группа поворотов квадрата $\implies Z_G = \frac{1}{4}(p_1^4 + p_2^2 + 2p_4)$.

Упражнения.

- (★) $Z_{G\times H} = Z_G Z_H$;
- (★) Найти Z_{A_n}, где A_n – знакопеременная группа.
- (★) Найти $Z_{\mathbb{Z}_n}$, где $\mathbb{Z}_n$ – циклическая группа порядка n.
- (★) Найти Z_{D_n}, где D_n – диэдральная группа порядка $2n$ = группа симметрий правильного $2n$-угольника.

Производящая функция конфигураций

- $\mathbb{N}^S = \{f\colon S \to \mathbb{N}\}$ – множество раскрасок на S.
- Вес раскраски $\alpha_f := (\#f^{-1}(1), \#f^{-1}(2), \ldots)$ и $x^f := x^{\alpha_f}$.

Производящая функция конфигураций

- $\mathbb{N}^S = \{f\colon S \to \mathbb{N}\}$ – множество раскрасок на S.
- Вес раскраски $\alpha_f := (\#f^{-1}(1), \#f^{-1}(2), \ldots)$ и $x^f := x^{\alpha_f}$.
- G действует на $\mathbb{N}^S$: $(wf)(s) = f(ws)$.
- Орбитальная эквивалентность: $f \sim g \iff$ существует $w \in G$: $g = wf$. Класс эквивалентности (орбита) = конфигурация.
- $\mathbb{N}^S/G :=$ множество конфигураций.

Производящая функция конфигураций

- $\mathbb{N}^S = \{f\colon S \to \mathbb{N}\}$ – множество раскрасок на S.
- Вес раскраски $\alpha_f := (\#f^{-1}(1), \#f^{-1}(2), \dots)$ и $x^f := x^{\alpha_f}$.
- G действует на $\mathbb{N}^S$: $(wf)(s) = f(ws)$.
- Орбитальная эквивалентность: $f \sim g \iff$ существует $w \in G$: $g = wf$. Класс эквивалентности (орбита) = конфигурация.
- $\mathbb{N}^S/G :=$ множество конфигураций.
- $f \sim g \implies x^f = x^g$, поэтому для $\mathcal{O} \in \mathbb{N}^S/G$ корректно определён вес $x^{\mathcal{O}}$.

Производящая функция конфигураций

- $\mathbb{N}^S = \{f : S \to \mathbb{N}\}$ – множество раскрасок на S.
- Вес раскраски $\alpha_f := (\#f^{-1}(1), \#f^{-1}(2), \dots)$ и $x^f := x^{\alpha_f}$.
- G действует на $\mathbb{N}^S$: $(wf)(s) = f(ws)$.
- Орбитальная эквивалентность: $f \sim g \iff$ существует $w \in G$: $g = wf$. Класс эквивалентности (орбита) = конфигурация.
- $\mathbb{N}^S/G$:= множество конфигураций.
- $f \sim g \implies x^f = x^g$, поэтому для $\mathcal{O} \in \mathbb{N}^S/G$ корректно определён вес $x^{\mathcal{O}}$.
- Производящая функция конфигураций: $\boxed{F_G(x) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathbb{N}^S/G} x^{\mathcal{O}}} \in \Lambda_n$

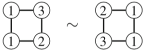
  (почему F_G – симметрическая функция?).

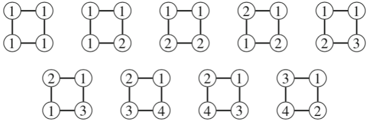
  Коэффициент при x^α = число орбит веса α.

Примеры

- $G = \mathfrak{S}_n$.
  - $f \sim g \iff \{\#f^{-1}(i) : i \in \mathbb{N}\} = \{\#g^{-1}(i) : i \in \mathbb{N}\}$ (как мультимножества).
  - Таким образом, $F_{\mathfrak{S}_n} = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = h_n$.

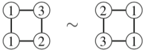
Примеры

- $G = \mathfrak{S}_n$.
  - $f \sim g \iff \{\#f^{-1}(i) : i \in \mathbb{N}\} = \{\#g^{-1}(i) : i \in \mathbb{N}\}$ (как мультимножества).
  - Таким образом, $F_{\mathfrak{S}_n} = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = h_n$.
- $G = D_4$.
  - Раскраски вершин квадрата эквивалентны $\iff$ переводятся друг в друга симметрией квадрата. **Пример:** 
  - Все неэквивалентные раскраски весов $\lambda \vdash 4$:

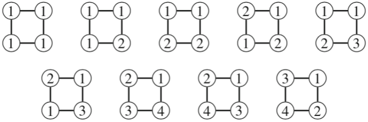


  - Таким образом, $F_G = m_4 + m_{31} + 2m_{22} + 2m_{211} + 3m_{1111}$.

Примеры

- $G = \mathfrak{S}_n$.
  - $f \sim g \iff \{\#f^{-1}(i) : i \in \mathbb{N}\} = \{\#g^{-1}(i) : i \in \mathbb{N}\}$ (как мультимножества).
  - Таким образом, $F_{\mathfrak{S}_n} = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda = h_n$.
- $G = D_4$.
  - Раскраски вершин квадрата эквивалентны $\iff$ переводятся друг в друга симметрией квадрата. **Пример:** 

  - Все неэквивалентные раскраски весов $\lambda \vdash 4$:



  - Таким образом, $F_G = m_4 + m_{31} + 2m_{22} + 2m_{211} + 3m_{1111}$.
- $G =$ группа поворотов квадрата $\implies$ $F_G = m_4 + m_{31} + 2m_{22} + 3m_{211} + 6m_{1111}$ $(\bigstar)$.

Теорема Пойа

Имеем симметрические функции Z_G (задаётся через степенные суммы) и F_G (задаётся через мономиальные функции). А как они связаны между собой?

Теорема Пойа

Имеем симметрические функции Z_G (задаётся через степенные суммы) и F_G (задаётся через мономиальные функции). А как они связаны между собой?

Теорема (Пойа)

$\boxed{Z_G = F_G}$.

Теорема Пойа

Теорема (Пойа)

$\boxed{Z_G = F_G}$.

- $\mathrm{Fix}(w) := \{s \in S : w(s) = s\}$ – множество неподвижных точек w.
- $G_s = \{w \in G : w(s) = s\}$ – стабилизатор s.
- $S/G :=$ множество орбит G на S.

Теорема Пойа

Теорема (Пойа)

$\boxed{Z_G = F_G}$.

- $\mathrm{Fix}(w) := \{s \in S : w(s) = s\}$ – множество неподвижных точек w.
- $G_s = \{w \in G : w(s) = s\}$ – стабилизатор s.
- $S/G :=$ множество орбит G на S.

Лемма (Бернсайда)

$$\boxed{\#(S/G) = \frac{1}{\#G} \sum_{w \in G} \#\mathrm{Fix}(w)}.$$

Таким образом, среднее число неподвижных точек равно числу орбит.

Доказательство леммы Бернсайда

- $\frac{1}{\#G}\sum_{w\in G}\mathrm{Fix}(w)=\frac{1}{\#G}\sum_{w\in G}\sum_{\substack{s\in S\\ w(s)=s}}1=\frac{1}{\#G}\sum_{s\in S}\sum_{\substack{w\in G\\ w(s)=s}}1=\frac{1}{\#G}\sum_{s\in S}\#G_s.$

Доказательство леммы Бернсайда

- $\frac{1}{\#G}\sum\limits_{w\in G}\mathrm{Fix}(w)=\frac{1}{\#G}\sum\limits_{w\in G}\sum\limits_{\substack{s\in S\\ w(s)=s}}1=\frac{1}{\#G}\sum\limits_{s\in S}\sum\limits_{\substack{w\in G\\ w(s)=s}}1=\frac{1}{\#G}\sum\limits_{s\in S}\#G_s.$
- Мультимножество $\{w(s), w\in G\}$ содержит каждый элемент орбиты Gs ровно $\frac{\#G}{\#Gs}$ раз (почему?) $\implies$ $\frac{\#G}{\#Gs}=\#G_s$.

Доказательство леммы Бернсайда

- $\frac{1}{\#G} \sum\limits_{w \in G} \mathrm{Fix}(w) = \frac{1}{\#G} \sum\limits_{w \in G} \sum\limits_{\substack{s \in S \\ w(s)=s}} 1 = \frac{1}{\#G} \sum\limits_{s \in S} \sum\limits_{\substack{w \in G \\ w(s)=s}} 1 = \frac{1}{\#G} \sum\limits_{s \in S} \#G_s.$
- Мультимножество $\{w(s), w \in G\}$ содержит каждый элемент орбиты Gs ровно $\frac{\#G}{\#Gs}$ раз (почему?) $\implies \frac{\#G}{\#Gs} = \#G_s$.
- $\frac{1}{\#G} \sum\limits_{w \in G} \#\mathrm{Fix}(w) = \frac{1}{\#G} \sum\limits_{s \in S} \frac{\#G}{\#Gs} = \sum\limits_{s \in S} \frac{1}{\#Gs}.$

Доказательство леммы Бернсайда

- $\frac{1}{\#G}\sum\limits_{w\in G}\mathrm{Fix}(w)=\frac{1}{\#G}\sum\limits_{w\in G}\sum\limits_{\substack{s\in S\\ w(s)=s}}1=\frac{1}{\#G}\sum\limits_{s\in S}\sum\limits_{\substack{w\in G\\ w(s)=s}}1=\frac{1}{\#G}\sum\limits_{s\in S}\#G_s.$
- Мультимножество $\{w(s), w\in G\}$ содержит каждый элемент орбиты Gs ровно $\frac{\#G}{\#Gs}$ раз (почему?) $\implies$ $\frac{\#G}{\#Gs}=\#G_s$.
- $\frac{1}{\#G}\sum\limits_{w\in G}\#\mathrm{Fix}(w)=\frac{1}{\#G}\sum\limits_{s\in S}\frac{\#G}{\#Gs}=\sum\limits_{s\in S}\frac{1}{\#Gs}.$
- $\mathcal{O}\in S/G$ – фиксированная орбита $\implies$ $(Gs=\mathcal{O}\iff s\in\mathcal{O})$ $\implies$ слагаемое $\frac{1}{\#\mathcal{O}}$ появляется $\#\mathcal{O}$ раз $\implies$ QED.

Доказательство теоремы Пойа

- $\alpha \in W_n \rightsquigarrow \mathcal{C}_\alpha := \{f \in \mathbb{N}^S$ веса $\alpha\}$ – инвариантно относительно G.

Доказательство теоремы Пойа

- $\alpha \in W_n \rightsquigarrow \mathcal{C}_\alpha := \{f \in \mathbb{N}^S \text{ веса } \alpha\}$ – инвариантно относительно G.
- $\mathcal{C}_\alpha \ni f \in \mathrm{Fix}(w) \iff$
  - в каждом цикле w элементы имеют один цвет;
  - цвет j появляется α_j раз.

Поэтому $\#\mathrm{Fix}(w|_{\mathcal{C}_\alpha}) = [x^\alpha] \prod_j p_j^{m_j(w)} = [x^\alpha] p_{\rho(w)}$.

Значит, $p_{\rho(w)}(x) = \sum_\alpha \#\mathrm{Fix}(w|_{\mathcal{C}_\alpha}) x^\alpha$.

Доказательство теоремы Пойа

- $\alpha \in W_n \rightsquigarrow \mathcal{C}_\alpha := \{f \in \mathbb{N}^S$ веса $\alpha\}$ – инвариантно относительно G.
- $\mathcal{C}_\alpha \ni f \in \mathrm{Fix}(w) \iff$
  - в каждом цикле w элементы имеют один цвет;
  - цвет j появляется α_j раз.

  Поэтому $\#\mathrm{Fix}(w|_{\mathcal{C}_\alpha}) = [x^\alpha] \prod_j p_j^{m_j(w)} = [x^\alpha] p_{\rho(w)}$.

  Значит, $p_{\rho(w)}(x) = \sum_\alpha \#\mathrm{Fix}(w|_{\mathcal{C}_\alpha}) x^\alpha$.
- Просуммируем по $w \in G$ и разделим на $\#G$.
  - Л.ч. $= Z_G$.
  - П.ч. $= F_G$ по лемме Бернсайда.

- $N_G(k)$:= число неэквивалентных раскрасок S в k цветов.

Следствие

$\boxed{N_G(k) = \frac{1}{\#G} \sum_{w \in G} k^{c(w)}}$, *где $c(w)$ – число циклов w.*

Доказательство. Подставим в теорему Пойа $x = 1^k$.

- $p_j(1^k) = k \implies p_{\rho(w)} = k^{c(w)} \implies Z_G =$ п.ч.
- $F_G(1^k) =$ число орбит $=$ л.ч.

- $N_G(k)$:= число неэквивалентных раскрасок S в k цветов.

Следствие

$$\boxed{N_G(k) = \frac{1}{\#G} \sum_{w \in G} k^{c(w)}},$$ *где $c(w)$ – число циклов w.*

Доказательство. Подставим в теорему Пойа $x = 1^k$.

- $p_j(1^k) = k \implies p_{\rho(w)} = k^{c(w)} \implies Z_G =$ п.ч.
- $F_G(1^k) =$ число орбит $=$ л.ч.

Пример.

- Число неэквивалентных раскрасок квадрата в k цветов $= F_{D_4}(1^k) = Z_{D_4}(1^k) = \frac{1}{8}(2k + 3k^2 + 2k^3 + k^4)$.

- $N_G(k)$:= число неэквивалентных раскрасок S в k цветов.

Следствие

$\boxed{N_G(k) = \frac{1}{\#G} \sum_{w \in G} k^{c(w)}}$, *где $c(w)$ – число циклов w.*

Доказательство. Подставим в теорему Пойа $x = 1^k$.

- $p_j(1^k) = k \implies p_{\rho(w)} = k^{c(w)} \implies Z_G =$ п.ч.
- $F_G(1^k) =$ число орбит $=$ л.ч.

Пример.

- Число неэквивалентных раскрасок квадрата в k цветов $= F_{D_4}(1^k) = Z_{D_4}(1^k) = \frac{1}{8}(2k + 3k^2 + 2k^3 + k^4)$.
- А сколько раскрасок, в которых две вершины белые и две чёрные?

- $N_G(k)$:= число неэквивалентных раскрасок S в k цветов.

Следствие

$\boxed{N_G(k) = \frac{1}{\#G}\sum_{w\in G} k^{c(w)}}$, *где* $c(w)$ *– число циклов* w.

Доказательство. Подставим в теорему Пойа $x = 1^k$.

- $p_j(1^k) = k \implies p_{\rho(w)} = k^{c(w)} \implies Z_G =$ п.ч.
- $F_G(1^k) =$ число орбит $=$ л.ч.

Пример.

- Число неэквивалентных раскрасок квадрата в k цветов $= F_{D_4}(1^k) = Z_{D_4}(1^k) = \frac{1}{8}(2k + 3k^2 + 2k^3 + k^4)$.
- А сколько раскрасок, в которых две вершины белые и две чёрные?
  Ответ: $[x_1^2x_2^2]F_{D_4} = [x_1^2x_2^2]Z_{D_4} = \frac{1}{8}[x_1^2x_2^2](p_1^4 + 2p_1^2p_2 + 3p_2^2 + 2p_4) =$
  $= \frac{1}{8}(6 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2) = 2$.

Приложение: малая теорема Ферма

Теорема (малая теорема Ферма)

q простое, $a \in \mathbb{N} \implies a^q - a$ *делится на* q.

Приложение: малая теорема Ферма

Теорема (малая теорема Ферма)

q простое, $a \in \mathbb{N} \implies a^q - a$ делится на q.

Доказательство.

- Группа $\mathbb{Z}_q$ порождена циклом длины q и содержит
  - $q - 1$ перестановок циклового типа (q),
  - 1 перестановку типа (1^q).
- По следствию $\mathbb{N} \ni N_{\mathbb{Z}_q}(a) = \frac{1}{q}(a^q + (q-1)a) \implies$ QED.

Связь с представлениями $\mathfrak{S}_n$

- χ^G := характер $\mathrm{Ind}_G^{\mathfrak{S}_S} \mathrm{id}_G$.
- Формула Фробениуса для характера индуцированного представления ($\mathcal{S}$ – система представителей H/K):

$$\chi_{\mathrm{Ind}_K^H \rho}(g) = \sum_{s\in\mathcal{S}\colon s^{-1}gs\in K} \chi^\rho(s^{-1}gs) = \frac{1}{\#K} \sum_{x\in H\colon x^{-1}gx\in K} \chi^\rho(x^{-1}gx).$$

- У нас $\chi^\rho \equiv 1 \implies \chi^G(g) = \frac{1}{\#G} \cdot \#(C_\lambda \cap G) \cdot \frac{\#\mathfrak{S}_S}{\#C_\lambda} = \frac{z_\lambda \cdot \#(C_\lambda \cap G)}{\#G}$
$\implies \mathrm{ch}(\chi^G) = \sum_{\lambda\vdash n} \frac{\#(C_\lambda\cap G)}{\#G} p_\lambda = Z_G \implies \boxed{\mathrm{ch}(\chi^G) = Z_G}$.

В частности, цикловый индекс Z_G – Шур-положительная функция (нет доказательств без теории представлений)!

Пример: графы

- $S :=$ множество 2-элементных подмножеств $[n]$ с естественным действием $\mathfrak{S}_n \rightsquigarrow G \subset \mathfrak{S}_{\binom{n}{2}}$.
- Раскраски в 2 цвета ("0" и "1") = графы на $[n]$. В общем случае – мультиграфы без петель.
- Эквивалентные раскраски = изоморфные (мульти)графы.

Пример: графы

- $S :=$ множество 2-элементных подмножеств $[n]$ с естественным действием $\mathfrak{S}_n \rightsquigarrow G \subset \mathfrak{S}_{\binom{n}{2}}$.
- Раскраски в 2 цвета ("0" и "1") = графы на $[n]$. В общем случае – мультиграфы без петель.
- Эквивалентные раскраски = изоморфные (мульти)графы.
- Значит (везде считаются неизоморфные графы на n вершинах),
  - $[x^\alpha]F_G =$ число мультиграфов с α_i рёбрами кратности $i-1$;

Пример: графы

- $S :=$ множество 2-элементных подмножеств $[n]$ с естественным действием $\mathfrak{S}_n \rightsquigarrow G \subset \mathfrak{S}_{\binom{n}{2}}$.
- Раскраски в 2 цвета ("0" и "1") $=$ графы на $[n]$. В общем случае – мультиграфы без петель.
- Эквивалентные раскраски $=$ изоморфные (мульти)графы.
- Значит (везде считаются неизоморфные графы на n вершинах),
  - $[x^\alpha]F_G =$ число мультиграфов с α_i рёбрами кратности $i-1$;
  - $F_G(1^k) =$ число мультиграфов с рёбрами кратности $\leq k-1$;
  - в частности, $F_G(1,1) =$ число графов;

Пример: графы

- $S :=$ множество 2-элементных подмножеств $[n]$ с естественным действием $\mathfrak{S}_n \rightsquigarrow G \subset \mathfrak{S}_{\binom{n}{2}}$.
- Раскраски в 2 цвета (“0” и “1”) = графы на $[n]$. В общем случае – мультиграфы без петель.
- Эквивалентные раскраски = изоморфные (мульти)графы.
- Значит (везде считаются неизоморфные графы на n вершинах),
  - $[x^\alpha]F_G =$ число мультиграфов с α_i рёбрами кратности $i-1$;
  - $F_G(1^k) =$ число мультиграфов с рёбрами кратности $\le k-1$;
  - в частности, $F_G(1,1) =$ число графов;
  - $[q^j]F_G(1, q, \dots, q^{k-1}) =$ число мультиграфов с рёбрами кратности $\le k-1$ и суммарным числом рёбер j, т.е. $F_G(1, q, \dots, q^{k-1})$ – производящая функция мультиграфов по числу рёбер.

Пример: графы, $n = 4$

- $S = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\} =$
  $= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.
- $\mathfrak{S}_4 \ni (1,2) \rightsquigarrow (2,4)(3,5) \in \mathfrak{S}_6$,
  $\mathfrak{S}_4 \ni (2,3) \rightsquigarrow (1,2)(5,6) \in \mathfrak{S}_6$,
  $\mathfrak{S}_4 \ni (3,4) \rightsquigarrow (2,3)(4,5) \in \mathfrak{S}_6$.
- Группа G порождена этими тремя инволюциями $\implies$
  $Z_G = \frac{1}{24}(p_1^6 + 9p_1^2p_2^2 + 8p_3^2 + 6p_2p_4)$ $(\bigstar)$.

Пример: графы, $n = 4$

- $S = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\} =$
  $= \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.
- Группа G порождена этими тремя инволюциями $\Longrightarrow$
  $Z_G = \frac{1}{24}(p_1^6 + 9p_1^2 p_2^2 + 8p_3^2 + 6p_2 p_4)$ ($\bigstar$) .
- $F_G(1,q) = Z_G(1,q) = \frac{1}{24}\big((1+q)^6 + 9(1+q)^2(1+q^2)^2 +$
  $+8(1+q^3)^2 + 6(1+q^2)(1+q^4)\big) = 1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6$.